

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

La Materia Oscura Tiepida

(Warm Dark Matter)

Relatore

Prof. Michele Liguori

Laureando

Stefano Gallo

Anno Accademico 2017/2018



## Abstract

Lo scopo di questa tesi è di presentare il problema della materia oscura da un punto di vista cosmologico e di formazione delle strutture, analizzando in particolare il modello di *materia oscura tiepida*.

Dopo una breve introduzione alla cosmologia, si descrive la teoria di Jeans per la formazione delle strutture cosmiche, basata sull'*instabilità gravitazionale di Jeans*. Dopodiché sono presentati i due modelli di materia oscura storicamente più importanti: la materia oscura *calda* e quella *fredda*. Questi modelli sono analizzati nel dettaglio mettendone in luce le caratteristiche principali e le rispettive criticità.

Infine è discusso il modello di *materia oscura tiepida*, evidenziandone i punti di forza rispetto alle altre teorie e discutendo come i confronti con le osservazioni possano restringerne lo spazio dei parametri.



# Indice

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduzione</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1      | Cosmologia . . . . .  | 1         |
| 1.1.1    | Equivalenza, ricombinazione e disaccoppiamento . . . . .    | 2         |
| 1.1.2    | Entropia e temperatura . . . . .                            | 4         |
| <b>2</b> | <b>L'instabilità gravitazionale di Jeans</b>                | <b>5</b>  |
| 2.1      | La teoria di Jeans per un fluido collisionale . . . . .     | 5         |
| 2.2      | La teoria di Jeans per un fluido non collisionale . . . . . | 7         |
| 2.3      | La teoria di Jeans per un Universo in espansione . . . . .  | 10        |
| 2.3.1    | Soluzione nel caso di dominio della materia . . . . .       | 12        |
| 2.3.2    | Il fattore di crescita lineare . . . . .                    | 12        |
| 2.3.3    | L'effetto Mészáros . . . . .                                | 13        |
| 2.4      | Crescita non lineare e collasso gravitazionale . . . . .    | 13        |
| <b>3</b> | <b>La Materia Oscura</b>                                    | <b>15</b> |
| 3.1      | La densità delle reliquie termiche . . . . .                | 15        |
| 3.2      | La materia oscura calda . . . . .                           | 16        |
| 3.2.1    | Il parametro di densità . . . . .                           | 17        |
| 3.2.2    | La massa di Jeans . . . . .                                 | 18        |
| 3.2.3    | Evoluzione delle perturbazioni . . . . .                    | 19        |
| 3.2.4    | I problemi del modello HDM . . . . .                        | 19        |
| 3.3      | La materia oscura fredda . . . . .                          | 20        |
| 3.3.1    | Il parametro di densità . . . . .                           | 20        |
| 3.3.2    | La massa di Jeans . . . . .                                 | 21        |
| 3.3.3    | Evoluzione delle perturbazioni . . . . .                    | 22        |
| 3.4      | Problemi del modello CDM . . . . .                          | 22        |
| <b>4</b> | <b>La Materia Oscura Tiepida</b>                            | <b>25</b> |
| 4.1      | Quantità importanti . . . . .                               | 25        |
| 4.2      | Evoluzione delle perturbazioni nel modello WDM . . . . .    | 27        |
| 4.3      | Vincoli sulla massa delle particelle . . . . .              | 29        |
| 4.3.1    | La funzione di massa . . . . .                              | 29        |
| 4.3.2    | Il limite di Gunn-Peterson . . . . .                        | 30        |
| 4.3.3    | Un limite indipendente dai barioni . . . . .                | 31        |
| <b>5</b> | <b>Conclusioni</b>  | <b>33</b> |



# Capitolo 1

## Introduzione

Lo scopo di questo lavoro è quello di presentare il problema della materia oscura da un punto di vista cosmologico e di formazione delle strutture, analizzando in particolare il modello di *materia oscura tiepida*.

Il primo capitolo è dedicato ad una breve introduzione alla cosmologia, nel quale sono presentate le equazioni fondamentali per la descrizione dell'Universo, le epoche principali della sua evoluzione e alcune relazioni importanti che verranno utilizzate in seguito.

Nel secondo capitolo si trova la teoria che descrive la formazione delle strutture cosmiche, basata sull'*instabilità gravitazionale di Jeans*.

Nel terzo capitolo sono presentati i due modelli di materia oscura storicamente più importanti: la materia oscura *calda* e quella *fredda*. Questi modelli sono analizzati nel dettaglio mettendone in luce le caratteristiche principali e le rispettive criticità.

Infine, nell'ultimo capitolo, è discusso il modello di *materia oscura tiepida*, evidenziandone i punti di forza rispetto alle altre teorie e discutendo come i confronti con le osservazioni possano restringerne lo spazio dei parametri.

### 1.1 Cosmologia

La cosmologia si pone l'obiettivo di studiare l'evoluzione dell'Universo nel suo complesso, basandosi sul *Principio Cosmologico*, ovvero sull'assunzione che, ad un tempo fissato e su scale abbastanza grandi, ogni osservatore veda l'Universo come *omogeneo* e *isotropo*.

Questo principio, applicato alla teoria della Relatività Generale di Einstein, permette di ricavare delle equazioni relativamente semplici che descrivono l'evoluzione dell'Universo e del *fluido cosmico* che lo permea.

Queste equazioni sono le *Equazioni di Friedmann*:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} \quad (1.1a)$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0 \quad (1.1b)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) \quad (1.1c)$$

dove  $a$  è il fattore di scala,  $\rho$  è la densità di energia,  $p$  è la pressione isotropica e  $k$  tiene conto della curvatura spaziale dell'Universo, mentre i punti indicano la derivata rispetto al tempo.

Come si può mostrare solo due delle equazioni (1.1) sono indipendenti, a fronte di tre variabili da determinare,  $a(t)$ ,  $\rho(t)$  e  $p(t)$ . Risulta quindi necessaria una condizione aggiuntiva che specifichi la

relazione tra  $p$  e  $\rho$  nel fluido che si va a considerare, ovvero l'equazione di stato del fluido,  $p = p(\rho)$ . In molti casi di interesse fisico l'equazione di stato può essere scritta come:

$$p = w\rho c^2 \quad (1.2)$$

dove il parametro  $w$  è una costante che dipende dal tipo di fluido che si sta considerando.

Il caso  $w = 0$  rappresenta un fluido senza pressione, chiamato *polvere*, che corrisponde alla materia oscura e, con buona approssimazione, alla materia barionica non-relativistica.

Un altro caso interessante si ha per  $w = \frac{1}{3}$ , che identifica la pressione di radiazione, e corrisponde ad un fluido di particelle ultrarelativistiche in equilibrio termico.

Ora abbiamo il giusto numero di equazioni, ma per arrivare ad una soluzione analitica per  $a(t)$  e  $\rho(t)$  è prima necessario fare un'altra approssimazione: dato che sperimentalmente non si osserva una curvatura spaziale dell'Universo, è possibile trascurare il termine contenente  $k$  nella (1.1a); inoltre, se  $w > -\frac{1}{3}$ , la stessa equazione ci assicura che il secondo termine diventa sempre più trascurabile andando indietro nel tempo.

Con queste informazioni è quindi possibile risolvere le equazioni di Friedmann (1.1a,1.1b) per le varie componenti dell'Universo. Si ha che:

- per un Universo composto di materia (barionica e oscura) non-relativistica ( $w = 0$ ):

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3}} \quad \rho_m(t) = \frac{1}{6\pi G} t^{-2} \quad (1.3)$$

- per un Universo composto di radiazione ( $w = 1/3$ ):

$$a(t) \propto t^{\frac{1}{2}} \quad \rho_{rad}(t) = \frac{3}{32\pi G} t^{-2} \quad (1.4)$$

In realtà queste soluzioni non sono realistiche, in quanto l'Universo non è composto solo di materia o solo di radiazione, ma sono una buona approssimazione nei periodi in cui una componente domina la densità di energia dell'Universo, per cui possiamo considerare solo il termine dominante nella (1.1a) e andare a vedere come si comportano le densità delle varie componenti. Ad esempio, considerando il caso in cui domini la radiazione, si trova:

$$a(t) \propto t^{\frac{1}{2}} \quad \longrightarrow \quad \rho_{rad}(t) \propto \frac{1}{a^4} \propto \frac{1}{t^2} \quad \rho_m(t) \propto \frac{1}{a^3} \propto \frac{1}{t^{3/2}} \quad (1.5)$$

Come si vede la densità di radiazione cala più velocemente della densità di materia, è quindi evidente che la situazione di radiazione dominante non può proseguire per sempre. Ci sarà un momento in cui le densità di radiazione e materia si equivarranno (detto appunto *equivalenza radiazione-materia*), dopodiché la materia comincerà a dominare la densità totale di energia.

Nel caso di dominio della materia si avrà quindi:

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3}} \quad \longrightarrow \quad \rho_m(t) \propto \frac{1}{a^3} \propto \frac{1}{t^2} \quad \rho_{rad}(t) \propto \frac{1}{a^4} \propto \frac{1}{t^{8/3}} \quad (1.6)$$

Anche in questo caso la densità di materia decresce meno di quella di radiazione, perciò questa situazione è stabile (almeno fino a quando non diventa importante il contributo dell'energia oscura, di cui però non ci occuperemo).

Ora che abbiamo delineato le dipendenze principali dei parametri cosmologici, possiamo andare ad identificare i momenti principali della *storia termica dell'Universo*.

### 1.1.1 Equivalenza, ricombinazione e disaccoppiamento

Allo stato attuale dell'Universo è evidente che materia e radiazione non sono in equilibrio termico tra di loro e risultano quindi completamente *disaccoppiate*, ovvero il tempo medio di interazione tra



queste due specie ( $\tau_c$ ) è molto maggiore del tempo caratteristico di espansione dell'Universo ( $\tau_H = a/\dot{a}$ ). Questo implica che dal momento del disaccoppiamento ad oggi i due fluidi si sono evoluti indipendentemente l'uno dall'altro. Partendo dalle condizioni attuali è quindi possibile ricostruire la temperatura ( $T$ ) di ciascuna componente indietro nel tempo almeno fino al disaccoppiamento, prima del quale le due specie si trovavano in equilibrio termico tra loro, e avevano perciò la stessa temperatura. Se la componente di materia si espande adiabaticamente, e assumendo che sia formata solo da idrogeno, la termodinamica fornisce il risultato<sup>1</sup>:

$$T_m = T_{0m} \left( \frac{a_0}{a} \right)^2 = T_{0m} (1+z)^2 \quad (1.7)$$

dove  $T_m$  è la temperatura della materia, e il pedice 0 indica il valore attuale.

Per un gas di fotoni sfruttiamo la relazione tra densità e temperatura per un corpo nero:

$$\rho_r \propto T_r^4 \quad \text{e} \quad \rho_r \propto a^{-4} \quad \Rightarrow \quad T_r = T_{0r} \frac{a_0}{a} = T_{0r} (1+z) \quad (1.8)$$

dove  $T_r$  è la temperatura della radiazione. A questo punto, se si assume che la sezione d'urto di interazione tra atomi e fotoni sia costante, il tempo di collisione  $\tau_c$  scala come l'inverso della densità degli atomi, e quindi aumentando  $z$  quest'ultimo cala molto più rapidamente del tempo caratteristico per l'espansione,  $\tau_H$ . Per esempio, in un universo dominato da materia si ha:

$$\tau_c \propto \rho_m^{-1} \propto (1+z)^{-3} \quad (1.9)$$

$$\tau_H = \left( \frac{a}{\dot{a}} \right) \propto (1+z)^{-3/2} \quad (1.10)$$

Questo implica che esiste un certo istante  $t_d$  prima del quale i processi di scattering avvenivano su scale temporali molto minori del tempo di espansione, in questa fase radiazione e materia erano fortemente accoppiate tra loro e si trovavano in equilibrio termico. Dopo  $t_d$  avviene il processo di *disaccoppiamento* e per  $t \gg t_d$  le due componenti evolvono separatamente. Ovviamente questo processo non è istantaneo, ma per ragionare su ampie scale temporali è più utile considerarlo come tale.

Un altro processo importante per la storia dell'Universo è quello chiamato *ricombinazione*: a temperature molto alte (quindi per alti  $z$ ) la materia si trova in uno stato di alta ionizzazione, in cui cioè una larga frazione di atomi è ionizzata; man mano che la temperatura cala, cala anche la percentuale di atomi ionizzati, che si combinano con gli elettroni a formare atomi neutri. È possibile identificare un *istante di ricombinazione*  $t_{rec}$ , prima del quale la materia è completamente ionizzata, e dopo il quale la frazione di ionizzazione è molto piccola. Di nuovo questo processo è graduale, ma risulta comodo in prima approssimazione considerarlo istantaneo.

L'ultimo evento di cui ci occupiamo è la già citata *equivalenza radiazione-materia*, ovvero il momento in cui le densità di materia e radiazione si trovano ad avere lo stesso valore. Chiamato  $t_{eq}$  il momento dell'equivalenza, a cui corrisponde uno  $z_{eq} = z(t_{eq})$ , sappiamo che la densità di materia ha la forma:

$$\rho_m = \rho_{0m} (1+z)^3 \quad (1.11)$$

mentre per la radiazione vale:

$$\rho_r = \rho_{0r} (1+z)^4 \quad (1.12)$$

Ponendo uguali queste due equazioni si trova:

$$(1+z_{eq}) = \frac{\rho_{0m}}{\rho_{0r}} = \frac{\Omega_{0m}}{\Omega_{0r}} \simeq 4.3 \times 10^4 \Omega_{0m} h^2 \quad (1.13)$$

che è un valore dell'ordine  $z_{eq} \sim 3 \cdot 10^3$ .

Confrontando i tempi di questi tre eventi, si trova che l'equivalenza avviene prima della ricombinazione, che a sua volta precede il disaccoppiamento di radiazione e materia.

---

<sup>1</sup>Questo non è altro che la relazione  $TV^{\gamma-1} = \text{cost.}$  per un gas monoatomico ( $\gamma = 5/3$ )

### 1.1.2 Entropia e temperatura

Un'altra relazione utile è quella che esprime la densità di energia  $\rho$  in funzione della temperatura per un gas di particelle ultra-relativistiche in equilibrio termico (trascurando l'effetto del potenziale chimico, che si dimostra essere piccolo), situazione che ben descrive l'Universo primordiale.

Per comodità poniamo  $c = k_B = \hbar = 1$ .

Si dimostra che per le varie componenti del gas vale la relazione:

$$\rho_i(T) = A \frac{g_i \pi^2}{30} T^4 \quad (1.14)$$

dove  $A$  è una costante che vale 1 per i bosoni e  $7/8$  per i fermioni, mentre  $g_i$  è il numero di stati di elicità della particella. Quindi la densità totale di energia sarà:

$$\rho(T) = \left( \sum_B g_{iB} + \frac{7}{8} \sum_F g_{iF} \right) \frac{\pi^2}{30} T^4 = g^*(T) \frac{\pi^2}{30} T^4 \quad (1.15)$$

in cui  $B$  sta per bosoni e  $F$  per fermioni. La quantità  $g^*$  è detta *numero efficace di gradi di libertà*. Le somme sono prese su tutte le specie che sono *ancora relativistiche* alla temperatura  $T$ , in quanto le densità delle specie non relativistiche (che sono ancora in equilibrio termico) sono fortemente sopresse dal fattore di Boltzmann  $e^{-m/T}$  e sono quindi trascurabili nel computo della densità totale.

A questo punto sappiamo che all'equilibrio termico l'entropia è data da:

$$S = \frac{(\rho + p) V}{T} = \frac{4}{3} \frac{\rho V}{T} = \frac{4}{3} \frac{g^*(T) \pi^2}{30} T^3 V \quad (1.16)$$

dove  $V$  è il volume.

Inoltre si dimostra che in un volume comovente l'entropia è conservata per le specie in equilibrio termico  $S(a^3, T) = \text{cost.}$ <sup>2</sup>

Da queste informazioni si ricava che se il numero efficace di gradi di libertà  $g^*$  cambia ad una certa temperatura  $\tilde{T}$  (ad esempio se una specie diventa non relativistica), anche la temperatura deve cambiare di conseguenza, secondo la relazione:

$$S_{(-)} = \frac{2\pi^2}{45} g_{(-)}^* T_{(-)}^3 V = \frac{2\pi^2}{45} g_{(+)}^* T_{(+)}^3 V = S_{(+)} \quad (1.17)$$

$$\Rightarrow T_{(+)} = \left( \frac{g_{(-)}^*}{g_{(+)}^*} \right)^{1/3} T_{(-)} \quad (1.18)$$

dove i simboli  $(-)$  e  $(+)$  indicano rispettivamente le quantità prima e dopo  $\tilde{T}$ .

Questo significa che la temperatura non scala esattamente come in (1.8), ma piuttosto come:

$$T = T_P \frac{a(t_P)}{a(t)} \left( \frac{g_{T_P}^*}{g_T^*} \right)^{1/3} \quad (1.19)$$

dove  $T_P$  e  $t_P$  sono rispettivamente la temperatura e il tempo di Planck.

Ad ogni modo, l'errore che si commette utilizzando la formula  $T \propto a^{-1}$  è piccolo in quanto  $g^*$  non varia più di un ordine di grandezza, mentre la temperatura varia di più di 30 ordini di grandezza, per cui la formula (1.8) è un'ottima approssimazione.

---

<sup>2</sup>Questo è vero fintanto che i processi rilevanti avvengono abbastanza lentamente da poter essere considerati adiabatici e reversibili

## Capitolo 2

# L'instabilità gravitazionale di Jeans

Lo scopo di questo capitolo sarà quello di mostrare l'origine delle strutture cosmiche a partire da piccole fluttuazioni di densità in un fluido omogeneo e isotropo. Per fare ciò seguiremo l'approccio di Jeans (1902) che, cercando di spiegare la formazione delle stelle e dei pianeti dalle nubi galattiche, dimostrò l'esistenza di un'importante instabilità che oggi porta il suo nome. Questa instabilità è tutt'ora il pilastro su cui si fonda il modello per la formazione di strutture su larga scala.

I calcoli di Jeans lo portarono a dimostrare che, partendo da un fluido “medio” omogeneo e isotropo, una piccola perturbazione nella densità può crescere nel tempo se l'effetto repulsivo della pressione è minore della tendenza dell'auto-gravità ad indurre il collasso; se questo secondo effetto predomina la perturbazione si accrescerà attirando materiale dalle sue vicinanze, fino a diventare un oggetto legato gravitazionalmente. Il criterio per stabilire se una perturbazione crescerà risulta essere semplicemente che la sua lunghezza d'onda caratteristica  $\lambda$  deve essere maggiore di una certa  $\lambda_J$ , detta *lunghezza di Jeans*, tipica del fluido.

L'approccio di Jeans, però, presenta un errore: egli operava infatti con l'assunzione di un Universo statico, e non in espansione. Come si vedrà più avanti questa assunzione non comporta grossi cambiamenti a livello qualitativo passando ad un Universo in espansione, ma ha l'effetto di sovrastimare il ritmo di crescita delle fluttuazioni. Questo effetto si può capire pensando che, se l'Universo si espande, una fluttuazione di densità, per crescere, deve attrarre materiale dai suoi dintorni mentre questo si sta allontanando da essa a causa dell'espansione, rallentando così il proprio processo di crescita.

Passiamo ora a calcolare nel dettaglio questa instabilità.

### 2.1 La teoria di Jeans per un fluido collisionale

Questo è il caso che Jeans stesso ha studiato e, nonostante non sia direttamente applicabile al caso cosmologico, è utile per delineare i passaggi significativi.

Partiamo scrivendo le equazioni di un fluido collisionale, in approssimazione Newtoniana:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \phi = 0 \quad (2.1b)$$

$$\nabla^2 \phi - 4\pi G \rho = 0 \quad (2.1c)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0 \quad (2.1d)$$

che sono, rispettivamente, l'*equazione di continuità*, l'*equazione di Eulero*, l'*equazione di Poisson* e l'equazione che descrive la conservazione dell'entropia per unità di massa (indicata con  $s$ ). L'ultima

equazione viene introdotta in quanto non si considerano termini dissipativi dovuti alla viscosità o alla conduzione termica. Consideriamo inoltre la pressione come funzione di  $\rho$  e  $s$ , quindi  $p = p(\rho, s)$ .

Jeans si propose di studiare l'evoluzione di una piccola perturbazione attorno ad una soluzione statica (detta di background) per il sistema (2.1) del tipo:

$$\rho = \rho_0 \quad \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad s = s_0 \quad p = p_0 \quad \phi = \phi_0 \quad (2.2)$$

Questa però presenta una inconsistenza, ovvero se  $\rho_0 \neq 0$  allora il potenziale gravitazionale  $\phi$  deve necessariamente variare spazialmente. Questo significa che una distribuzione omogenea di materia deve globalmente espandersi o contrarsi. Tuttavia, ignorando questo problema, i risultati che si ottengono sono qualitativamente uguali a quelli con background in espansione.

Procediamo dunque col ragionamento di Jeans.

Cerchiamo ora una soluzione che rappresenta una piccola perturbazione attorno alla soluzione statica (2.2):

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho \quad \mathbf{v} = \delta\mathbf{v} \quad s = s_0 + \delta s \quad p = p_0 + \delta p \quad \phi = \phi_0 + \delta\phi \quad (2.3)$$

e dato che  $p$  è funzione di  $\rho$  e  $s$ , si ha:

$$\delta p = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \delta\rho + \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \delta s \quad \text{con} \quad \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \equiv c_s^2 \quad (2.4)$$

dove  $c_s$  è la velocità del suono nel fluido.

Sostituendo nel sistema (2.1) e trascurando i termini oltre il primo ordine nelle perturbazioni, si ottiene il sistema:

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \delta\mathbf{v} = 0 \quad (2.5a)$$

$$\frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{c_s^2}{\rho_0} \nabla \delta p + \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \nabla \delta s + \nabla \delta\phi = 0 \quad (2.5b)$$

$$\nabla^2 \delta\phi - 4\pi G \delta\rho = 0 \quad (2.5c)$$

$$\frac{\partial \delta s}{\partial t} = 0 \quad (2.5d)$$

Ora non resta che studiare le soluzioni del sistema perturbato.

Dato che il sistema è formato da equazioni differenziali alle derivate parziali con coefficienti costanti ammetterà come soluzione una sovrapposizione di onde piane del tipo:

$$\delta*_i = \delta_i \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (2.6)$$

dove le  $\delta*_i$  corrispondono alle perturbazioni  $\delta\rho$ ,  $\delta\mathbf{v}$ ,  $\delta\phi$  e  $\delta s$  rispettivamente. Dato che le soluzioni imperturbate non dipendono dalla posizione, è possibile prendere le  $\delta_i$  della forma:

$$\delta_i = \Delta_i \exp(i\omega t) \quad (2.7)$$

in cui le ampiezze  $\Delta_i$  sono denotate da  $D$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\Phi$  e  $\Sigma$ . In queste equazioni si ha che:  $\mathbf{r}$  è il vettore posizione,  $\mathbf{k}$  è un vettore d'onda reale e  $\omega$  è una frequenza che può essere in generale complessa.

Sostituendo a questo punto in (2.5) e ponendo  $\delta_0 = D/\rho_0$  si trova:

$$\omega \delta_0 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.8a)$$

$$\omega \mathbf{V} + \mathbf{k} c_s^2 \delta_0 + \frac{\mathbf{k}}{\rho_0} \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \Sigma + \mathbf{k} \Phi = 0 \quad (2.8b)$$

$$k^2 \Phi + 4\pi G \rho_0 \delta_0 = 0 \quad (2.8c)$$

$$\omega \Sigma = 0 \quad (2.8d)$$

Le soluzioni di maggior interesse sono quelle dipendenti dal tempo, ovvero  $\omega \neq 0$ . Applicando questa condizione si trova che  $\Sigma = 0$  e  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{V} \neq 0$ . Separando le componenti perpendicolari e parallele di quest'ultimo prodotto scalare si trova che le componenti perpendicolari non producono perturbazioni nella densità, quindi non sono interessanti in questo contesto, e possiamo concentrarci solo sulle componenti parallele. In questo modo il sistema (2.8) diventa:

$$\omega \delta_0 + kV = 0 \quad (2.9a)$$

$$\omega V + kc_s^2 \delta_0 + k\Phi = 0 \quad (2.9b)$$

$$k^2 \Phi + 4\pi G \rho_0 \delta_0 = 0 \quad (2.9c)$$

Soluzioni non banali per questo sistema si ottengono ponendo il determinante della matrice dei coefficienti uguale a zero:

$$\det \begin{pmatrix} \omega & k & 0 \\ c_s^2 k & \omega & k \\ 4\pi G \rho_0 & 0 & k^2 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.10)$$

$$\Rightarrow \omega^2 k^2 - c_s^2 k^4 + 4\pi G \rho_0 \omega k^2 = 0 \quad (2.11)$$

$$\Rightarrow \omega^2 - c_s^2 k^2 + 4\pi G \rho_0 = 0 \quad (2.12)$$

Che fornisce la *relazione di dispersione*:

$$\omega = \pm \sqrt{c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0} \quad (2.13)$$

Come si può vedere dalla forma delle soluzioni (2.7), se  $\omega$  è reale si hanno come soluzioni delle onde piane che si propagano nelle direzioni  $\pm \mathbf{k}$ , invece, se  $\omega$  è complesso si hanno delle soluzioni stazionarie di ampiezza crescente o decrescente (a seconda del segno di  $\omega$ ), che è esattamente il risultato discusso all'inizio del capitolo sotto il nome di *instabilità di Jeans*.

Il criterio per distinguere tra queste due soluzioni si trova ponendo uguale a zero l'espressione sotto radice nella (2.13), ricordando che  $k = 2\pi/\lambda$ :

$$k^2 = \left( \frac{2\pi}{\lambda_J} \right)^2 = \frac{4\pi G \rho_0}{c_s^2} \quad (2.14)$$

$$\Rightarrow \lambda_J = c_s \sqrt{\frac{\pi}{\rho_0 G}}$$

in cui  $\lambda_J$  è detta *lunghezza di Jeans*, se la lunghezza d'onda  $\lambda$  della perturbazione è maggiore di  $\lambda_J$  si ha l'instabilità, altrimenti la perturbazione si propaga come un'onda di ampiezza costante.

## 2.2 La teoria di Jeans per un fluido non collisionale

Consideriamo ora il caso di un gas di particelle non collisionali (ovvero che non interagiscono tra di loro), questo caso è particolarmente interessante in quanto come si vedrà questo è un modello importante per descrivere le particelle di materia oscura.

La principale differenza del caso non collisionale da quello collisionale è che le particelle non hanno più un'unica velocità  $\mathbf{v}$  in ogni punto, ma presentano invece una distribuzione casuale di velocità in ogni punto dello spazio. Per quanto ci riguarda considereremo questa distribuzione isotropa, inoltre per semplicità assumiamo che le particelle abbiano tutte la stessa massa  $m$ .

Per un fluido non collisionale, le equazioni (2.1a) e (2.1b) vengono rimpiazzate dall'*equazione di Liouville*:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot f \mathbf{v} + \nabla_v \cdot f \dot{\mathbf{v}} = 0 \quad (2.15)$$

dove  $\nabla_{\mathbf{v}} = \partial/\partial\mathbf{v}$ , mentre  $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t)$  è la funzione di distribuzione delle particelle nello spazio delle fasi, e rappresenta quindi la densità numerica di particelle nel volume compreso tra  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  con velocità tra  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ . Nel nostro caso di interesse, in cui si ha un background omogeneo, isotropo e statico, si dimostra che  $f$  può dipendere solo da  $v^2$ .

L'equazione (2.1c) non cambia nel caso non collisionale, per cui vale lo stesso discorso fatto nella sezione precedente sull'esistenza di una soluzione stazionaria. L'unica differenza è che ora:

$$\rho = m \int f \, d\mathbf{v} \quad (2.16)$$

Come per il caso di fluido collisionale, scriviamo le equazioni per una piccola perturbazione attorno alla soluzione stazionaria del tipo (2.3), trascurando i termini al secondo ordine nelle perturbazioni. Per l'equazione di Poisson (2.1c) si ha:

$$\nabla^2 \delta\phi - 4\pi G \delta\rho = 0 \quad (2.17)$$

dove  $\delta\rho$  è dato da una relazione analoga alla (2.16):

$$\delta\rho = m \int \delta f \, d\mathbf{v} \quad (2.18)$$

Per l'equazione di Liouville si ha invece:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(f + \delta f) + \nabla \cdot (f + \delta f)(\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}) + \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (f + \delta f)(\dot{\mathbf{v}} + \delta\dot{\mathbf{v}}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\delta f + \nabla \cdot (f \delta\mathbf{v} + \mathbf{v} \delta f) + \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (f \delta\dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{v}} \delta f) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\delta f + \mathbf{v} \cdot \nabla \delta f + \delta\dot{\mathbf{v}} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ora, utilizzando il fatto che l'accelerazione  $\dot{\mathbf{v}}$  è legata al potenziale gravitazionale dalla relazione  $\dot{\mathbf{v}} = -\nabla\Phi$ , si può riscrivere l'ultima equazione come:

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta f + \mathbf{v} \cdot \nabla \delta f - \nabla\delta\phi \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0 \quad (2.20)$$

A questo punto si cerca una soluzione delle equazioni (2.17) e (2.20) nella forma di onda piana:

$$\delta* = A_* \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t)\} \quad (2.21)$$

dove il simbolo  $*$  indica le quantità  $f$ ,  $\phi$  e  $\rho$ . Senza perdere di generalità prendiamo il vettore d'onda  $\mathbf{k}$  nella direzione  $x$ ,  $\mathbf{k} = (k, 0, 0)$ .

Applicando l'operatore  $\nabla$  all'equazione (2.20) e sfruttando il fatto che  $\nabla$  e  $\nabla_{\mathbf{v}}$  commutano, si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla\delta f + \underbrace{\nabla_{\mathbf{v}} \cdot \nabla \delta f}_{=0} + \mathbf{v} \cdot \nabla^2 \delta f - \nabla^2 \delta\phi \nabla_{\mathbf{v}} f - \nabla\delta\phi \nabla_{\mathbf{v}} \underbrace{\nabla f}_{=0} = 0 \quad (2.22)$$

Sostituendo in questa equazione l'ansatz (2.21) e l'equazione (2.17):

$$\begin{aligned} k\omega \delta f + v_x k^2 \delta f + 4\pi G \delta\rho \frac{\partial f}{\partial v} &= 0 \\ \Rightarrow \delta f &= -4\pi G \frac{df}{dv^2} \frac{2v_x}{k(\omega + kv_x)} \delta\rho \end{aligned} \quad (2.23)$$

Ora, sostituendo l'espressione appena ottenuta nell'equazione (2.18):

$$\begin{aligned} \delta\rho &= -\frac{4\pi G m}{k} \delta\rho \int \frac{2v_x}{\omega + kv_x} \frac{df}{dv^2} d\mathbf{v} \\ \Rightarrow k + 4\pi G m \int \frac{2v_x}{\omega + kv_x} \frac{df}{dv^2} d\mathbf{v} &= 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Questa è la relazione di dispersione per questo sistema.

Per trovare una soluzione per grandi lunghezze d'onda ( $k \rightarrow 0$ ), è possibile espandere la relazione di dispersione in serie di potenze di  $kv_x/\omega$ . Ricordando che al primo ordine  $\frac{1}{1+x} \simeq 1 - x$  si ha che:

$$\omega^2 \simeq -\frac{4\pi Gm\omega}{k} \int 2v_x \frac{df}{dv^2} d\mathbf{v} + 4\pi Gm \int 2v_x^2 \frac{df}{dv^2} d\mathbf{v} \quad (2.25)$$

Il primo integrale è zero per ragioni di simmetria, mentre il secondo si può calcolare per parti, tenendo conto che  $f(v^2)$  va a zero per  $v \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \int 2v_x^2 \frac{df}{dv^2} d^3v &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty v^2 \sin \theta \, 2(v \cos \phi \sin \theta)^2 \frac{df}{dv^2} dv \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^\infty 2v^4 \frac{dv}{dv^2} \frac{df}{dv} dv \\ &= \frac{4}{3}\pi \int_0^\infty v^3 \frac{df}{dv} dv \\ &= \frac{4}{3}\pi \left[ \cancel{\left( v^3 f \right)} \Big|_0^\infty - 3 \int_0^\infty v^2 f dv \right] \\ &= -4\pi \int_0^\infty v^2 f dv \\ &= - \int f d\mathbf{v} = -\frac{\rho}{m} \end{aligned} \quad (2.26)$$

in cui, con un leggero abuso di notazione,  $\theta$  e  $\phi$  sono gli angoli polari nello spazio delle velocità, e nell'ultimo passaggio si è utilizzata la relazione (2.16). Alla fine dunque si ottiene la relazione:

$$\omega^2 \simeq -4\pi G\rho \quad (2.27)$$

da cui si vede chiaramente la presenza di un'instabilità, in quanto  $\omega$  è un numero complesso e di conseguenza l'esponenziale in  $t$  nella soluzione (2.21) diventa reale.

Anche per questo sistema si può trovare la lunghezza di Jeans  $\lambda_J$  ponendo, in analogia col caso precedente,  $\omega = 0$  nella relazione di dispersione (2.24):

$$k^2 = \left( \frac{2\pi}{\lambda_J} \right)^2 = -4\pi Gm \int 2 \frac{df}{dv^2} d\mathbf{v} \quad (2.28)$$

Di nuovo è possibile valutare l'integrale per parti, in coordinate polari:

$$\begin{aligned} \int 2 \frac{df}{dv^2} d^3v &= \int d\Omega \int_0^\infty 2v^2 \frac{df}{dv^2} dv \\ &= 4\pi \int_0^\infty 2v^2 \frac{dv}{dv^2} \frac{df}{dv} dv \\ &= 4\pi \int_0^\infty v \frac{df}{dv} dv \\ &= 4\pi \left[ \cancel{\left( v f \right)} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty f dv \right] \\ &= - \int v^{-2} f d\mathbf{v} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Quindi, introducendo la quantità:

$$v_*^{-2} \equiv \frac{\int v^{-2} f d\mathbf{v}}{\int f d\mathbf{v}} = \langle v^{-2} \rangle \quad (2.30)$$

si ottiene che la lunghezza di Jeans è:

$$\left(\frac{\lambda_J}{2\pi}\right)^2 = \left[4\pi Gm \frac{\int v^{-2} f d\mathbf{v}}{\int f d\mathbf{v}} \int f d\mathbf{v}\right]^{-1}$$

$$\Rightarrow \lambda_J = v_* \left(\frac{\pi}{G\rho}\right)^{1/2} \quad (2.31)$$

Questa relazione è uguale alla (2.14), scambiando  $c_s$  con  $v_*$ . Nel caso particolare di una distribuzione Maxwelliana

$$f(v) = \frac{\rho}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{-v^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.32)$$

si ha che  $v_* = \sigma$ , la dispersione delle velocità.

A differenza del caso collisionale, le perturbazioni con  $\lambda < \lambda_J$  in un fluido non collisionale non oscillano semplicemente, ma vengono smorzate da un processo detto “*free-streaming*”: infatti la grande velocità di queste particelle permette loro di “scappare” dalle buche di potenziale generate dalle fluttuazioni, andando quindi a smorzarne l'intensità. A lungo andare questo processo distrugge completamente le perturbazioni di lunghezza d'onda minore della *lunghezza d'onda di free-streaming*, che per ordini di grandezza vale:

$$\lambda_f \simeq a(t) \int_0^t \frac{v_*}{a(t')} dt' \quad (2.33)$$

Come si vedrà più avanti, questo processo gioca un ruolo fondamentale nella formazione delle strutture e nella loro evoluzione.

## 2.3 La teoria di Jeans per un Universo in espansione

Consideriamo ora la situazione più realistica di un Universo in espansione, mantenendo però per semplicità l'approccio Newtoniano che abbiamo usato nella Sezione 2.1.

Il sistema di equazioni (2.1) ammette una soluzione che descrive l'espansione di una distribuzione uniforme di materia:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \quad \mathbf{v} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) \mathbf{r} \quad \phi = \frac{2}{3}\pi G\rho r^2 \quad s = s_0 \quad p = p(\rho, s) \quad (2.34)$$

dove  $\mathbf{r}$  è una coordinata fisica, legata alla coordinata comoviente  $\mathbf{x}$  della relazione  $\mathbf{r} = \frac{a}{a_0} \mathbf{x}$ .

Come si può notare questa soluzione presenta un difetto, per  $\mathbf{r} \rightarrow \infty$  sia  $\mathbf{v}$  che  $\phi$  divergono. Il problema nasce dal fatto di usare l'approccio Newtoniano, mentre non si presenta nel trattamento relativistico, perciò lo possiamo ignorare senza pregiudicare il risultato finale.

Come prima si introducono piccole perturbazioni nella soluzione (2.34) (rispettivamente  $\delta\rho$ ,  $\delta\mathbf{v}$ ,  $\delta\phi$  e  $\delta p$ ) e si sostituisce nelle equazioni iniziali (2.1), ottenendo:

$$\dot{\delta\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\delta\rho + \frac{\dot{a}}{a}(\mathbf{r} \cdot \nabla)\delta\rho + \rho(\nabla \cdot \delta\mathbf{v}) = 0 \quad (2.35a)$$

$$\dot{\delta\mathbf{v}} + \frac{\dot{a}}{a}\delta\mathbf{v} + \frac{\dot{a}}{a}(\mathbf{r} \cdot \nabla)\delta\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla\delta p - \nabla\delta\phi \quad (2.35b)$$

$$\nabla^2\delta\phi - 4\pi G\delta\rho = 0 \quad (2.35c)$$

$$\dot{\delta s} + \frac{\dot{a}}{a}(\mathbf{r} \cdot \nabla)\delta s = 0 \quad (2.35d)$$



dove i punti indicano le derivate parziali rispetto al tempo. A questo punto è necessario rimuovere “a mano” i termini in  $(\mathbf{r} \cdot \nabla)$ , in quanto costituiscono una grave inconsistenza con le corrispettive equazioni relativistiche [14] e conducono a risultati errati.

Ora esprimiamo le perturbazioni in forma di onde piane del tipo:

$$\delta * _i = \delta_i(t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (2.36)$$

in cui i simboli hanno lo stesso significato che assumevano nella Sezione 2.1, con la differenza che ora, dato che i coefficienti delle equazioni dipendono dal tempo, non è più possibile esprimere le  $\delta_i$  come funzioni del tipo  $\Delta_i \exp(i\omega t)$ . Inoltre è importante notare che il vettore d'onda  $k$  varia nel tempo a causa dell'espansione dell'Universo, secondo la legge:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{a_0}{a} = k_0 \frac{a_0}{a} \quad (2.37)$$

in questo modo l'esponentiale in (2.36) non dipende dal tempo.

Sostituendo nel sistema (2.35) si ottengono le equazioni:

$$\dot{D} + 3\frac{\dot{a}}{a}D + i\rho\mathbf{k} \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.38a)$$

$$\dot{\mathbf{V}} + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{V} + ic_s^2\mathbf{k}\frac{D}{\rho} + i\frac{\mathbf{k}}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho \Sigma + i\mathbf{k}\Phi = 0 \quad (2.38b)$$

$$k^2\Phi + 4\pi GD = 0 \quad (2.38c)$$

$$\dot{\Sigma} = 0 \quad (2.38d)$$

Le soluzioni più interessanti per questo sistema si ottengono ponendo  $\Sigma = 0$  e  $\mathbf{k}$  parallelo a  $\mathbf{V}$ :

$$\dot{D} + 3\frac{\dot{a}}{a}D + i\rho kV = 0 \quad (2.39a)$$

$$\dot{V} + \frac{\dot{a}}{a}V + ik\left(c_s^2 - \frac{4\pi G\rho}{k^2}\right)\frac{D}{\rho} = 0 \quad (2.39b)$$

Ora, ponendo  $\delta = D/\rho$ , la (2.39a) diventa:

$$\dot{\delta} + ikV = 0 \quad (2.40)$$

Derivando rispetto al tempo:

$$\ddot{\delta} + ik\left(\dot{V} - \frac{\dot{a}}{a}V\right) = 0 \quad (2.41)$$

Dalle ultime due equazioni è possibile ricavare  $V$  e  $\dot{V}$ :

$$V = i\frac{\dot{\delta}}{k} \quad (2.42a)$$

$$\dot{V} = \frac{i}{k}\left(\ddot{\delta} - ik\frac{\dot{a}}{a}V\right) = \frac{i}{k}\left(\ddot{\delta} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}\right) \quad (2.42b)$$

che, sostituite in (2.39b), danno:

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} + (c_s^2k^2 - 4\pi G\rho)\delta = 0 \quad (2.43)$$

Questa equazione (analoga alla relazione di dispersione (2.12)) è quella che governa l'evoluzione delle sovradensità nell'Universo, ed è quindi di fondamentale importanza nella formazione delle strutture. Schematicamente la si può vedere come:

$$\ddot{\delta} + (\text{Pressione} - \text{Gravità}) = 0 \quad (2.44)$$

come si vede, quindi, la gravità tende a far aumentare le sovradensità, attirando materia nella regione. D'altra parte, quando le particelle si avvicinano il loro moto di agitazione termica tende invece ad allontanarle. Quindi, se la pressione è abbastanza elevata le perturbazioni della densità non possono crescere; al contrario, quando la pressione è bassa rispetto alla gravità, si presenta il fenomeno dell'instabilità gravitazionale, e le sovradensità crescono col tempo.

In pratica si ritrova un risultato analogo a quello di Jeans: per lunghezze d'onda  $\lambda \ll \lambda_J$  si hanno soluzioni oscillanti, mentre per  $\lambda \gg \lambda_J$  si trovano due modi, uno crescente e l'altro decrescente, con

$$\lambda_J \simeq c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\rho}} \quad (2.45)$$

### 2.3.1 Soluzione nel caso di dominio della materia

Vogliamo ora trovare la soluzione per il caso più semplice, quello di un Universo di Einstein-de Sitter (ovvero con  $k = 0$  nelle equazioni di Friedmann (1.1)) dominato dalla materia. In questo modello si ha che:

$$\rho(t) = \frac{1}{6\pi G t^2} \quad (2.46a)$$

$$a(t) = a_0 \left( \frac{t_0}{t} \right)^{2/3} \quad (2.46b)$$

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t} \quad (2.46c)$$

Sostituendo questi risultati nell'equazione (2.43) si ottiene:

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3t}\dot{\delta} - \frac{2}{3t^2} \left( 1 - \frac{c_s^2 k^2}{4\pi G \rho} \right) \delta = 0 \quad (2.47)$$

Questa equazione, per  $k \rightarrow 0$  (ovvero per grandi lunghezze d'onda), ammette soluzioni esatte del tipo  $\delta \propto t^n$  con  $n$  costante; sostituendo si ha:

$$3n^2 + n - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad n = -1 \quad (2.48)$$

Quindi si ottengono due modi, uno crescente

$$\delta_+ \propto t^{2/3} \propto a(t) \quad (2.49)$$

e l'altro decrescente

$$\delta_- \propto t^{-1} \quad (2.50)$$

La soluzione completa è quindi una combinazione lineare di questi due modi:

$$\delta(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{x})\delta_+(t) + B(\mathbf{x})\delta_-(t) \quad (2.51)$$

Dopo un certo tempo la soluzione decrescente sarà diventata trascurabile, quindi si può assumere:

$$\delta(\mathbf{x}, t) \simeq A(\mathbf{x})\delta_+(t) \quad (2.52)$$

### 2.3.2 Il fattore di crescita lineare

Nella sezione precedente abbiamo visto che le fluttuazioni di densità in un Universo di Einstein-de Sitter dominato da materia crescono come il fattore di scala  $a(t)$ . Questo risultato può essere generalizzato ad altre cosmologie introducendo un *fattore di crescita lineare* delle perturbazioni  $g(z)$ , che rappresenta l'andamento del modo crescente delle perturbazioni in una particolare cosmologia. In generale si ha quindi che:

$$\delta(\mathbf{x}, z) = \delta(\mathbf{x}, z_i) \frac{g(z)}{g(z_i)} \quad (2.53)$$

dove

$$g(z) = [\delta_0(1+z)]^{-1} \quad (2.54)$$

in cui  $\delta_0$  è detto *fattore di soppressione di crescita* e dipende dai dettagli della cosmologia considerata. È consuetudine normalizzare  $g(z)$  in modo che  $g(z=0) = 1$ .

### 2.3.3 L'effetto Mészáros

Consideriamo ora il caso di un gas di particelle non collisionali in un Universo dominato dalla radiazione, in cui quest'ultima sia disaccoppiata dalle particelle e uniformemente distribuita, in modo che influenzi solo la velocità di espansione.

L'equazione (2.43) si può riscrivere come:

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = 4\pi G\rho\delta \quad (2.55)$$

in cui però  $H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r)$ . Cambiando variabile  $y \equiv \rho_m/\rho_r = a/a_{eq}$  e usando le equazioni di Friedmann si ottiene:

$$\delta'' + \frac{2+3y}{2y(1+y)}\delta' - \frac{3}{2y(1+y)}\delta = 0 \quad (2.56)$$

Da questa equazione si ricava che il modo crescente è:

$$\delta \propto y + \frac{2}{3} \quad (2.57)$$

Questa soluzione rivela che, nel periodo di dominio della radiazione, l'Universo si espandeva in maniera talmente veloce che le perturbazioni non riuscivano a crescere, lasciando  $\delta$  “congelata” ad un valore costante. Questo risultato è detto *effetto Mészáros*, dal nome del suo scopritore [19], o periodo di *stagnazione*.

## 2.4 Crescita non lineare e collasso gravitazionale

Finora abbiamo considerato l'evoluzione lineare delle perturbazioni, che fornisce informazioni molto importanti nella prima fase di crescita, ma è valida solo finché  $\delta \ll 1$ . Quando le perturbazioni diventano dell'ordine delle unità la teoria lineare non è più adeguata per descriverle e si entra nel regime *non lineare*.

Il modello più semplice per descrivere la formazione di strutture è quello del *collasso sferico* “a cilindro”. L'idea è di considerare una perturbazione sferica con densità costante al suo interno, in un Universo piatto con  $\Omega_m = 1$ . Chiaramente una perturbazione di questo tipo è estremamente improbabile, ma la soluzione di questo semplice caso fornisce risultati utili in generale.

La simmetria sferica permette di risolvere esattamente le equazioni per questa perturbazione, trovando che essa evolve come un Universo chiuso, in modo indipendente dal background. Questa soluzione si può esprimere in forma parametrica in funzione del parametro  $\theta$ :

$$r = A(1 - \cos \theta) \quad (2.58a)$$

$$t = B(\theta - \sin \theta) \quad (2.58b)$$

dove  $r$  è il raggio della sovradensità. Da qui si vede immediatamente che  $r$  cresce fino a raggiungere il massimo per  $\theta = \pi$ , in cui  $t_{TA} = \pi B$ , questo momento è detto di “*turn-around*”. Dopodiché il raggio cala andando a zero per  $\theta = 2\pi$  al tempo  $t = 2\pi B = 2t_{TA}$ , in cui l'oggetto è completamente collassato ad un punto.

In un oggetto reale le disomogeneità e le deviazioni dalla simmetria sferica prevengono il collasso ad un punto, arrestando il processo quando l'oggetto è *virializzato*, ovvero raggiunge una configurazione stabile che soddisfa il *teorema del viriale*. Il teorema afferma che, in una configurazione stabile, deve

valere la relazione  $2K = -U$ , dove  $K$  è l'energia cinetica e  $U$  è quella potenziale, in questo caso gravitazionale. Da questa condizione si ricava che  $r_{vir} = r_{TA}/2$ .

Usando questo modello è possibile ricavare la sovradensità della struttura rispetto al background, e confrontarla con la predizione della teoria lineare allo stesso tempo. In questo modo si ricava una connessione tra le due teorie, che permette di usare la sovradensità lineare (più semplice da calcolare) per descrivere l'evoluzione non lineare. Si ha quindi che:

1. La perturbazione diventa non lineare quando:

$$\delta_{NL} \simeq 1 \qquad \delta_L \simeq 0.57 \qquad (2.59)$$

dove  $\delta$  è la soluzione esatta e  $\delta_L$  è la sovradensità che si troverebbe se la teoria lineare fosse corretta.

2. Il momento di turn-around, quando la perturbazione cessa di espandersi e comincia a collassare, si ha quando:

$$\rho_{TA} = \frac{9\pi^2}{16} \rho_b(t_{TA}) \simeq 5.5 \rho_b(t_{TA}) \qquad \delta_L \simeq 1.067 \qquad (2.60)$$

dove  $\rho_b$  è la densità di background dell'Universo.

3. Il momento del collasso è associato al tempo  $t_{coll} = 2t_{TA}$ , in cui il raggio è  $r_{coll} = r_{TA}/2$ . Le densità in questo momento sono:

$$\rho_{coll} = 18\pi^2 \rho_b(t_{coll}) \simeq 178 \rho_b(t_{coll}) \qquad \delta_L \simeq 1.69 \equiv \delta_c \qquad (2.61)$$

dove si è definita  $\delta_c \equiv 1.69$  come la densità lineare critica. Quando una perturbazione supera questo valore (nell'evoluzione lineare) si considera completamente collassata in un oggetto virializzato.

I risultati appena presentati dipendono dalla cosmologia del background, ma il valore di soglia  $\delta_c$  rimane abbastanza simile a quello qui presentato, rendendolo un ottimo parametro per valutare il momento del collasso.

## Capitolo 3

# La Materia Oscura

Le evidenze sperimentali che la materia “luminosa” ordinaria non è sufficiente a spiegare alcuni degli effetti gravitazionali che si osservano nell’Universo iniziarono a presentarsi fin dagli anni ’30 del Novecento [25], ma fu solo negli anni ’70 che gli studiosi del settore furono costretti ad introdurre nei modelli una materia “invisibile” chiamata *materia oscura*.

Inizialmente si pensava che la materia oscura fosse formata da barioni, come la materia ordinaria, ma che semplicemente non fosse in oggetti abbastanza densi da emettere radiazione, o fosse concentrata in buchi neri. Questa ipotesi presentava però dei grossi problemi; prima di tutto risultava difficile mantenere non luminosa quella grande quantità di materia, ma i motivi più fondamentali erano due: l’abbondanza degli elementi leggeri, attraverso la teoria della *nucleosintesi primordiale*, fornisce un limite superiore alla materia barionica dell’ordine di alcuni punti percentuali della densità critica; mentre i modelli di formazione delle strutture con materia puramente barionica predicono delle anisotropie nella radiazione cosmica di background dell’ordine  $\sim 10^{-3}$ , molto maggiori di quelle osservate. Dall’inizio degli anni ’80 quindi il modello di materia oscura barionica venne abbandonato a favore di una materia oscura *non barionica*, formata da particelle che ancora non conosciamo.

L’ipotesi più probabile per spiegare la materia oscura non barionica è che questa sia formata da particelle prodotte nell’Universo primordiale, che ad un certo punto si sono disaccoppiate, diventando non collisionali e interagendo solo gravitazionalmente con le altre componenti dell’Universo.

Particelle di questo tipo sono dette *reliquie cosmiche*, e si dividono in due categorie: *termiche* e *non termiche*; le prime sono prodotte in equilibrio termico con il resto dell’Universo, e rimangono in equilibrio fino al loro disaccoppiamento, le altre invece non sono prodotte in equilibrio termico e rimangono disaccoppiate per l’intera vita dell’Universo (non ci occuperemo di questo caso).

Le reliquie termiche possono essere ulteriormente suddivise in *calde* e *fredde*. Le prime si disaccoppiano quando sono ancora relativistiche, le altre quando sono già non relativistiche.

### 3.1 La densità delle reliquie termiche

Per queste particelle è possibile calcolare la densità numerica e la densità di energia a partire dall’equazione di Boltzmann:

$$\frac{dn_X}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}n_X + \langle\sigma_A v\rangle n_X^2 - \psi = 0 \quad (3.1)$$

dove  $n_X$  è la densità numerica della specie  $X$ ,  $\langle\sigma_A v\rangle$  è il tasso di annichilazione ( $\sigma_A$  è la sezione d’urto per la reazione di annichilazione e  $v$  è la velocità media per particella), mentre  $\psi$  è il tasso di creazione di coppie della specie  $X$ .

Se il sistema è in equilibrio, ovvero se i termini di creazione e annichilazione si equivalgono, l’equazione (3.1) ammette la soluzione  $n_{Xeq} \propto a^{-3}$ , quindi  $\psi$  può essere riscritto come  $\psi = n_{Xeq}^2 \langle\sigma_A v\rangle$ , e l’equazione diventa:

$$\frac{dn_X}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}n_X + \langle\sigma_A v\rangle (n_X^2 - n_{Xeq}^2) = 0 \quad (3.2)$$

Ora, tralasciando per semplicità il pedice  $X$ , introduciamo la densità comovente:

$$n_c = n \left( \frac{a}{a_0} \right)^3 \quad (3.3)$$

Sostituendo nella (3.2):

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[ n_c \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 \right] + 3 \frac{\dot{a}}{a} \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 n_c + \langle \sigma_{Av} \rangle \left( \frac{a_0}{a} \right)^6 (n_c^2 - n_{c,eq}^2) = 0 \\ & \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 \frac{dn_c}{dt} + 3 n_c \left( \frac{a_0}{a} \right)^2 \cdot \left( -\frac{a_0}{a^2} \right) \dot{a} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 n_c + \langle \sigma_{Av} \rangle \left( \frac{a_0}{a} \right)^6 (n_c^2 - n_{c,eq}^2) = 0 \\ & \Rightarrow \frac{dn_c}{dt} + \langle \sigma_{Av} \rangle \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 (n_c^2 - n_{c,eq}^2) = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Cambiando la derivata da  $t$  ad  $a$ , e raccogliendo  $n_{c,eq}^2$  al secondo termine:

$$\frac{1}{n_{c,eq}} \frac{dn_c}{da} \dot{a} + \langle \sigma_{Av} \rangle n_{eq} \left[ \left( \frac{n_c}{n_{c,eq}} \right)^2 - 1 \right] = 0 \quad (3.5)$$

Riarrangiando i termini si ottiene:

$$\frac{a}{n_{c,eq}} \frac{dn_c}{da} = - \frac{\langle \sigma_{Av} \rangle n_{eq}}{\dot{a}/a} \left[ \left( \frac{n_c}{n_{c,eq}} \right)^2 - 1 \right] = - \frac{\tau_H}{\tau_{coll}} \left[ \left( \frac{n_c}{n_{c,eq}} \right)^2 - 1 \right] \quad (3.6)$$

dove  $\tau_{coll} = 1/\langle \sigma_{Av} \rangle n_{eq}$  è il tempo medio tra le collisioni e  $\tau_H = a/\dot{a}$  è il tempo caratteristico per l'espansione dell'Universo.

L'equazione (3.6) non ammette soluzioni analitiche generali, ma è possibile trovare una soluzione approssimata considerando il processo di “freeze out” delle particelle: per  $\tau_{coll} \ll \tau_H$  le particelle sono in equilibrio termico, quindi la loro densità sarà  $n_{eq} \propto a^{-3}$ ; ad un certo punto questa diventerà abbastanza bassa da fare in modo che le particelle non riescano più a crearsi e annichilirsi abbastanza velocemente da mantenere l'equilibrio, assestandosi quindi su un valore costante. Da quel momento saranno quindi disaccoppiate dal resto dell'Universo.

Ricapitolando:

$$\begin{aligned} n_c &\simeq n_{c,eq} & \text{per } \tau_{coll} &\ll \tau_H \\ n_c &\simeq n_c(t_d) \simeq \text{cost.} & \text{per } \tau_{coll} &\gg \tau_H \end{aligned} \quad (3.7)$$

dove  $t_d$  è il momento del disaccoppiamento, cioè quando le reazioni di creazione e annichilimento smettono di essere efficaci a livello cosmologico, definito da:

$$\tau_{coll}(t_d) \simeq \tau_H(t_d) \quad (3.8)$$

## 3.2 La materia oscura calda

La prima classe di particelle che fu proposta per spiegare la materia oscura non barionica, negli anni '80, fu quella dei neutrini massivi (con massa di qualche decina di eV). Questi, disaccoppiandosi in regime ultrarelativistico, ricadono sotto la definizione di reliquie termiche calde, e perciò sono dei candidati per la cosiddetta *materia oscura calda* (in inglese “hot dark matter”, HDM).

Consideriamo però il caso di una particella  $X$  generica, che diventi non relativistica ad un certo istante  $t_{nX}$ , tale che:

$$k_B T(t_{nX}) \simeq m_X c^2 \quad (3.9)$$

Perché questa specie sia materia oscura calda deve valere che  $t_{nX} > t_{dX}$ , dove  $t_{dX}$  è definito dall'equazione (3.8).

### 3.2.1 Il parametro di densità

Per prima cosa vogliamo calcolare il parametro di densità attuale per questa specie  $\Omega_X$ , in modo che il confronto con le osservazioni fornisca dei limiti sulla massa della particella.

Per fare ciò utilizziamo un approccio simile a quello della Sezione 1.1.2. Prima però è necessario modificare leggermente la definizione di  $g^*$  data in 1.1.2, per tenere conto del caso in cui le varie componenti dell'Universo non siano più in equilibrio termico, in questo caso si ha:

$$g^* = \sum_B g_{iB} \left( \frac{T_i}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_F g_{iF} \left( \frac{T_i}{T} \right)^3 \quad (3.10)$$

dove  $T_i$  sono le temperature delle componenti non in equilibrio, mentre  $T$  è la temperatura delle componenti in equilibrio termico. Le altre relazioni continuano a valere.

Dalla conservazione dell'entropia per unità di volume comovente si ricava che

$$g_X^* T_{0X}^3 = g_0^* T_{0r}^3 \quad (3.11)$$

dove  $g_X^*$  è il numero efficace di gradi di libertà dell'Universo a  $t_{dX}$ ,  $T_{0X}$  è la temperatura efficace attuale (definita attraverso il momento medio delle particelle come  $T_X \simeq \overline{p_X} c / 3k_B$ ),  $T_{0r}$  è la temperatura attuale della radiazione e  $g_0^*$  è dato da

$$g_0^* = 2 + \frac{7}{8} \times 3 \times 2 \times \left( \frac{T_{0\nu}}{T_{0r}} \right)^3 \quad (3.12)$$

con  $T_{0\nu} = \left( \frac{4}{11} \right)^{1/3} T_{0r}$  la temperatura attuale dei neutrini.

Dall'equazione (3.11) si ricava:

$$T_{0X} = \left( \frac{g_0^*}{g_X^*} \right)^{1/3} T_{0r} \quad (3.13)$$

Sostituendo questa espressione nella formula per la densità numerica si ottiene:

$$\begin{aligned} n_{0X} &= B g_X \frac{\zeta(3)}{\pi^2} \left( \frac{k_B}{\hbar c} \right)^3 T_{0X}^3 \\ &= B g_X \frac{\zeta(3)}{\pi^2} \left( \frac{k_B}{\hbar c} \right)^3 \left( \frac{g_0^*}{g_X^*} \right) T_{0r}^3 \\ &\simeq \frac{1}{2} B g_X \frac{g_0^*}{g_X^*} n_{0r} \end{aligned} \quad (3.14)$$

dove  $B$  è una costante che vale  $\frac{3}{4}$  o 1 a seconda che la particella  $X$  sia un fermione o un bosone,  $\zeta$  è la funzione zeta di Riemann e  $\zeta(3) \simeq 1.202$ . Nell'ultimo passaggio si è moltiplicato e diviso per  $g_r = 2$  per ottenere la densità numerica della radiazione.

A questo punto il parametro di densità per la specie  $X$  è dato da:

$$\begin{aligned} \Omega_X &= \frac{m_X n_{0X}}{\rho_{0c}} \\ &\simeq 2 B g_X \frac{g_0^*}{g_X^*} \frac{m_X}{10^2 \text{ eV} h^2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Confrontando questo risultato con i dati sperimentali osservati si possono ottenere delle stime per  $m_X$ .

Le equazioni (3.9) e (3.13) possono essere usate per calcolare il redshift corrispondente a  $t_n X$ :

$$z_{nX} \simeq 1.43 \times 10^5 \left( \frac{g_0^*}{g_X^*} \right)^{1/3} \frac{m_x}{10^2 \text{ eV}} \quad (3.16)$$

Invece il momento dell'equivalenza tra le componenti relativistiche (fotoni e neutrini) e quelle non relativistiche ( $X$  dopo  $t_n X$  e barioni) corrisponderà al redshift:

$$z_{eq} = \frac{\Omega_X}{K_0 \Omega_r} \simeq 2.3 \times 10^4 \frac{\Omega_X h^2}{K_0} \simeq 5 \times 10^4 g_X \left( \frac{g_0^*}{g_X^*} \right) \frac{m_x}{10^2 \text{ eV}} \quad (3.17)$$

dove si è assunto  $\Omega_X \gg \Omega_b$  in modo da poter trascurare il contributo dei barioni in  $\Omega$ . Il fattore  $K_0 \simeq 1.681$  tiene conto del contributo dei neutrini.

Chiaramente non si può avere  $z_{nX} < z_{eq}$ ; nel caso in cui la componente di materia oscura domini la densità di energia a  $t_{nX}$  si assume che  $z_{nX} \simeq z_{eq}$ .

### 3.2.2 La massa di Jeans

Adesso vogliamo studiare le quantità rilevanti per la formazione delle strutture.

Queste sono essenzialmente:

- la massa di Jeans, definita come la massa contenuta in una sfera di raggio  $\frac{1}{2}\lambda_{JX}$ :

$$M_{JX} = \frac{1}{6}\pi m_x n_x \lambda_{JX}^3 \quad (3.18)$$

dove  $\lambda_{JX}$  è la lunghezza di Jeans esaminata nella Sezione 2.2

- e la massa di “free-streaming”, definita in modo analogo alla massa di Jeans:

$$M_{fX} = \frac{1}{6}\pi m_x n_x \lambda_{fX}^3 \quad (3.19)$$

dove  $\lambda_{fX}$  è la *lunghezza di free-streaming*, introdotta sempre nella Sezione 2.2

Per valutare queste quantità è prima necessario determinare il comportamento della velocità media delle particelle nelle epoche cosmologiche rilevanti, che per la materia oscura calda sono quelle prima e dopo  $t_{nX}$ .

Approssimativamente si ha che:

$$v_X \simeq \frac{c}{\sqrt{3}} \quad \text{per } z \geq z_{nX} \quad (3.20a)$$

$$v_X \simeq \frac{c}{\sqrt{3}} \frac{1+z}{1+z_{nX}} \quad \text{per } z \leq z_{nX} \quad (3.20b)$$

Ora, per trovare la lunghezza di Jeans, basta sostituire  $v_X$  a  $v_*$  nell’equazione (2.31):

$$\lambda_{JX} = v_X \left( \frac{\pi}{G\rho} \right)^{1/2} \quad (3.21)$$

in cui  $\rho$  è la densità totale di energia, che dovrebbe tenere conto della componente relativistica  $\rho_r$  (fotoni e neutrini), della materia oscura  $\rho_X$  e di quella barionica  $\rho_b$ ; in prima approssimazione è possibile trascurare il contributo dei barioni e considerare  $\rho \simeq \rho_r$  prima dell’equivalenza (per  $z > z_{eq}$ ) e  $\rho \simeq \rho_X$  per  $z < z_{eq}$ .

A questo punto è possibile calcolare la massa di Jeans nella varie epoche, ricordando che  $\rho_X \propto (1+z)^3$  e  $\rho_r \propto (1+z)^4$ :

- per  $z \geq z_{nX}$  si ha

$$\begin{aligned} M_{JX} &\simeq \frac{1}{6}\pi\rho_{0c}\Omega_X(1+z)^3 \left( \frac{c}{\sqrt{3}} \right)^3 \left( \frac{\pi}{G\rho_{0r}} \right)^{3/2} (1+z)^{-6} \\ &\simeq \frac{1}{6}\pi\rho_{0c}\Omega_X \left( \frac{c}{\sqrt{3}} \right)^3 \left( \frac{\pi}{G\rho_{0r}} \right)^{3/2} (1+z)^{-3} \\ &\simeq M_{JX}(z_{nX}) \left( \frac{1+z}{1+z_{nX}} \right)^{-3} \end{aligned} \quad (3.22)$$

- per  $z_{nX} \geq z \geq z_{eq}$

$$\begin{aligned} M_{JX} &\simeq \frac{1}{6}\pi\rho_{0c}\Omega_X(1+z)^3 \left( \frac{c}{\sqrt{3}} \right)^3 \left( \frac{1+z}{1+z_{nX}} \right)^3 \left( \frac{\pi}{G\rho_{0r}} \right)^{3/2} (1+z)^{-6} \\ &\simeq 3.5 \times 10^{15} \left( \frac{1+z_{eq}}{1+z_{nX}} \right)^3 (\Omega_X h^2)^{-2} M_\odot \\ &\simeq \text{const.} \simeq M_{JX}(z_{nX}) = M_{JX,max} \end{aligned} \quad (3.23)$$



– per  $z \leq z_{eq}$

$$\begin{aligned} M_{JX} &\simeq \frac{1}{6} \pi \rho_{0c} \Omega_X (1+z)^3 \left( \frac{c}{\sqrt{3}} \right)^3 \left( \frac{1+z}{1+z_{nX}} \right)^3 \left( \frac{\pi}{G \rho_{0r}} \right)^{3/2} (1+z)^{-9/2} \\ &\simeq M_{JX}(z_{nX}) \left( \frac{1+z}{1+z_{eq}} \right)^{3/2} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Come si può notare, la massa di Jeans  $M_{JX}$  cresce come  $a^3$  fino a raggiungere il valore massimo a  $t_{nX}$ , in cui le particelle diventano non relativistiche, dopodiché rimane costante fino al momento dell'equivalenza  $t_{eq}$ , dopo il quale comincia a calare come  $a^{-3/2}$ .

Per completare lo schema delle grandezze significative ora non resta che analizzare il comportamento della massa di free-streaming  $M_{fX}$ .

Partendo dalla relazione (3.19), e seguendo un ragionamento analogo a quello per la massa di Jeans, si trova che per  $z > z_{eq}$  la massa di free-streaming è:

$$M_{fX}(z) \simeq 0.6 M_{JX} \quad (3.25)$$

Poco dopo  $z_{eq}$  la curva di  $M_{fX}$  interseca quella di  $M_{JX}$ , e si può quindi assumere che qualsiasi perturbazione con massa  $M < M_{JX,max}$  verrà completamente dissipata per effetto del free-streaming.

Come ultima cosa, prima di passare ad esaminare l'evoluzione delle perturbazioni, è necessario introdurre un altro concetto, quello di *orizzonte cosmologico*. Questa quantità definisce essenzialmente la scala entro cui parti diverse di una stessa perturbazione sono in contatto causale l'una con l'altra ad una certa epoca. Se una perturbazione ha una lunghezza d'onda  $\lambda$  maggiore della dimensione dell'orizzonte ad un certo istante risulterà praticamente invisibile, in quanto la sovradensità sarà praticamente costante in tutta la regione dentro l'orizzonte, andandosi a sommare alla soluzione di background. Una scala di perturbazioni diventa quindi rilevante solamente quando *attraversa* l'orizzonte, ovvero quando la sua lunghezza d'onda diventa minore della dimensione dell'orizzonte.

### 3.2.3 Evoluzione delle perturbazioni

Ora che abbiamo fissato le quantità importanti, possiamo andare ad analizzare l'evoluzione delle perturbazioni nelle varie epoche cosmologiche.

Le fluttuazioni nella componente oscura di massa  $M < M_{JX,max}$ , come abbiamo visto, sono dissipate dal free-streaming delle particelle, mentre quelle di massa  $M > M_{JX,max}$  crescono ininterrottamente attraverso tutte le epoche (a parte un breve periodo di stagnazione a causa dell'effetto Mészáros tra  $t_{nX}$  e  $t_{eq}$ ); quindi, supponendo che lo spettro delle perturbazioni abbia ampiezza che decresce all'aumentare della scala, le prime strutture che si andranno a formare sono quelle con masse dell'ordine  $M \simeq M_{JX,max}$ , queste strutture sono dette *"pancake"* a causa della loro forma schiacciata. Le strutture più piccole, con masse dell'ordine delle galassie, si formano da queste per successive frammentazioni, in un processo di tipo *top-down*.

### 3.2.4 I problemi del modello HDM

Nei primi anni '80 cominciarono ad emergere alcuni problemi nel modello di materia oscura calda, che in poco tempo fu abbandonato in favore del modello di materia oscura fredda. Alcuni dei principali problemi di questo modello sono:

1. Dallo studio dell'evoluzione non-lineare e delle velocità di streaming si trova che il collasso dei supercluster di galassie deve essere avvenuto recentemente: nel limite meno stringente di sicuro per  $z < 2$ . Le osservazioni sull'età delle galassie indicano invece un periodo per la loro

formazione precedente a  $z \simeq 3$ ; inoltre l'abbondanza di *quasar* (associati a galassie o cluster di galassie lontane) per  $z > 2$  è inconsistente col processo di formazione *top-down* in cui le galassie si formano dopo i supercluster.

2. Le simulazioni del collasso dei “pancake” tenendo conto della presenza dei barioni mostrano che questi, cadendo nelle buche di potenziale generate dalla materia oscura, vengono scaldati al punto da non riuscire a condensare e a formare galassie, posticipandone ulteriormente la formazione. Per arginare questo problema si potrebbe pensare di aggiungere materia barionica all'Universo, ma questo è in contrasto con i limiti imposti dalla nucleosintesi primordiale.
3. Il problema più importante nasce però dal calcolo delle fluttuazioni di temperatura nella radiazione cosmica di fondo (in inglese *cosmic microwave background*, CMB). Dalle osservazioni del satellite COBE si ricava che le fluttuazioni sono dell'ordine  $\frac{\delta T}{T} \simeq 10^{-5}$ , mentre, per formare delle strutture nell'epoca attuale, lo spettro di perturbazione della HDM deve avere ampiezze considerevolmente maggiori.

Come minimo, queste evidenze contro il modello HDM indicano che la formazione di strutture in un Universo dominato da queste particelle deve essere parecchio più complicata rispetto a quanto detto finora. È quindi più logico provare a modificare il modello per ottenere un maggior accordo coi dati sperimentali.

### 3.3 La materia oscura fredda

La *materia oscura fredda* (in inglese “*cold dark matter*”, CDM), al contrario di quella calda, è formata da particelle che si disaccoppiano quando sono già non relativistiche, ovvero da reliquie termiche fredde. Per questa classe di particelle vogliamo ripercorrere i passaggi fatti per la HDM, calcolando le grandezze di interesse e poi andando ad analizzare le conseguenze sull'evoluzione delle perturbazioni.

#### 3.3.1 Il parametro di densità

Calcolare la densità nel caso di materia oscura fredda è più complicato che nel caso precedente. Al momento del disaccoppiamento la densità numerica delle particelle di CDM è data dalla distribuzione di Boltzmann:

$$n_X(t_{dX}) = g_X \frac{1}{\hbar^3} \left( \frac{m_X k_B T_{dX}}{2\pi} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_X c^2}{k_B T_{dX}}\right) \quad (3.26)$$

in cui  $T_{dX}$  è la temperatura al tempo  $t_{dX}$ . La densità numerica attuale è quindi:

$$n_{0X} = n_X(t_{dX}) \left( \frac{a(t_{dX})}{a_0} \right)^3 = n_X(t_{dX}) \frac{g_0^*}{g_X^*} \left( \frac{T_{0r}}{T_{dX}} \right)^3 \quad (3.27)$$

Il problema è ora trovare quanto vale  $T_{dX}$ , che è la temperatura per cui vale l'equazione (3.8).

Il tempo caratteristico di espansione dell'Universo a  $t_{dX}$  è:

$$\tau_H(t_{dX}) = \frac{a}{\dot{a}} \simeq \left( \frac{3}{32\pi G\rho} \right)^{1/2} \simeq 0.3 \frac{\hbar T_P}{g_X^{*1/2} k_B T_{dX}^2} \quad (3.28)$$

dove  $T_P$  è la temperatura di Planck.

Il tempo caratteristico per le collisioni è invece:

$$\tau_{coll}(t_{dX}) = \left[ n(t_{dX}) \sigma_0 \left( \frac{k_B T_{dX}}{m_X c^2} \right)^q \right]^{-1} \quad (3.29)$$

in cui si è assunto che

$$\langle \sigma_{Av} \rangle = \sigma_0 \left( \frac{k_B T_{dX}}{m_X c^2} \right)^q \quad (3.30)$$

in cui la costante  $q$  vale 0 o 1 per la maggior parte delle reazioni. Introducendo la quantità  $x = m_X c^2 / k_B T$ , la condizione  $\tau_H(x) = \tau_{coll}(x)$  è soddisfatta per  $x = x_{dX} = m_X c^2 / k_B T_{dX} \gg 1$ . Il valore di  $x_{dX}$  si trova risolvendo l'equazione (3.8), che in forma approssimata si può scrivere come:

$$x_{dX}^{q-1/2} \exp(x_{dX}) = 0.038 \frac{g_X}{(g_X^*)^{1/2}} \frac{c}{\hbar^2} m_P m_X \sigma_0 = C \quad (3.31)$$

con  $m_P$  la massa di Planck.

Risolvendo si ottiene:

$$x_{dX} \simeq \log C - (q - 1/2) \log(\log C) \quad (3.32)$$

A questo punto la densità attuale della specie  $X$  è:

$$\rho_{0X} \simeq 10 g_X^{*-1/2} \frac{(k_B T_{0r})^3}{\hbar c^4 \sigma_0 m_P} x_{dX}^{n+1} \quad (3.33)$$

Le relazioni (3.16) e (3.17) per trovare  $z_{nX}$  e  $z_{eq}$  rimangono uguali anche nel caso di CDM, con l'accorgimento di cambiare  $g_X^*$  con  $g_{nX}^*$  (il valore di  $g^*$  a  $t_{nX}$ ) nella (3.16).

### 3.3.2 La massa di Jeans

Come nel caso precedente, vogliamo ora calcolare la massa di Jeans nelle varie fasi dell'Universo, in modo da identificare l'andamento delle perturbazioni e le scale rilevanti per la formazione delle strutture.

Per prima cosa identifichiamo il comportamento della velocità media delle particelle nelle epoche di interesse: nel caso delle reliquie fredde le scale temporali importanti sono  $t_{nX}$  e  $t_{dX}$ . La velocità media andrà quindi come:

$$v_X \simeq \frac{c}{\sqrt{3}} \quad \text{per } z \geq z_{nX} \quad (3.34a)$$

$$v_X \simeq \frac{c}{\sqrt{3}} \left( \frac{1+z}{1+z_{nX}} \right)^{1/2} \quad \text{per } z_{nX} \geq z \geq z_{dX} \quad (3.34b)$$

$$v_X \simeq \frac{c}{\sqrt{3}} \left( \frac{1+z_{dX}}{1+z_{nX}} \right)^{1/2} \frac{1+z}{1+z_{dX}} \quad \text{per } z \leq z_{dX} \quad (3.34c)$$

Ricordando le equazioni (3.21) e (3.18) per  $\lambda_{JX}$  e  $M_{JX}$ , con le stesse approssimazioni della sezione precedente, si trova che:

– per  $z \geq z_{nX}$

$$\begin{aligned} M_{JX} &\simeq \frac{1}{6} \pi \rho_{0c} \Omega_X \left( \frac{c}{\sqrt{3}} \right)^3 \left( \frac{\pi}{G \rho_{0r}} \right)^{3/2} (1+z)^{3-6} \\ &\simeq M_{JX}(z_{nX}) \left( \frac{1+z}{1+z_{nX}} \right)^{-3} \end{aligned} \quad (3.35)$$

– per  $z_{nX} \geq z \geq z_{dX}$

$$\begin{aligned} M_{JX} &\simeq \frac{1}{6} \pi \rho_{0c} \Omega_X \left( \frac{c}{\sqrt{3}} \right)^3 \left( \frac{1}{1+z_{nX}} \right)^{3/2} \left( \frac{\pi}{G \rho_{0r}} \right)^{3/2} (1+z)^{3+\frac{3}{2}-6} \\ &\simeq M_{JX}(z_{nX}) \left( \frac{1+z}{1+z_{nX}} \right)^{-3/2} \end{aligned} \quad (3.36)$$

– per  $z_{dX} \geq z \geq z_{eq}$

$$M_{JX} \simeq \frac{1}{6} \pi \rho_{0c} \Omega_X \left( \frac{c}{\sqrt{3}} \right)^3 \left( \frac{\pi}{G \rho_{0r}} \right)^{3/2} \left( \frac{1+z_{dX}}{1+z_{nX}} \right)^{3/2} \left( \frac{1}{1+z_{dX}} \right)^3 (1+z)^{3+3-6} \quad (3.37)$$

$$\simeq \text{cost.} \simeq M_{JX}(z_{dX}) = M_{JX,max}$$

– per  $z \leq z_{eq}$

$$M_{JX} \simeq \frac{1}{6} \pi \rho_{0c} \Omega_X \left( \frac{c}{\sqrt{3}} \right)^3 \left( \frac{\pi}{G \rho_{0r}} \right)^{3/2} \left( \frac{1+z_{dX}}{1+z_{nX}} \right)^{3/2} \left( \frac{1}{1+z_{dX}} \right)^3 (1+z)^{3+3-\frac{9}{2}} \quad (3.38)$$

$$\simeq M_{JX}(z_{dX}) \left( \frac{1+z}{1+z_{eq}} \right)^{3/2}$$

Anche in questo caso si può notare come la massa di Jeans cresca fino a  $z_{dX}$ , rimanga costante nel periodo tra  $z_{dX}$  e  $z_{eq}$ , e poi cali dopo il momento dell'equivalenza.

### 3.3.3 Evoluzione delle perturbazioni

A differenza del caso della materia oscura calda, il valore massimo della massa di Jeans  $M_{JX,max}$  per una tipica particella di CDM è troppo piccolo per avere interesse cosmologico. Per questo motivo, anche se come prima tutte le perturbazioni con massa  $M < M_{JX,max}$  vengono completamente dissipate, la loro scala è trascurabile rispetto alle scale cosmologiche e per questo non si considerano. In questo caso, quindi, tutte le perturbazioni di interesse crescono praticamente indisturbate da processi di smorzamento dalla loro formazione ad oggi (subiscono però un periodo di stagnazione per effetto Mészáros prima di  $z_{eq}$ ).

Dopo la ricombinazione queste perturbazioni possono dare origine a fluttuazioni della componente barionica dell'ordine  $M \geq 10^5 M_\odot$ ; dato poi che lo spettro delle fluttuazioni cala all'aumentare della massa, le prime strutture a formarsi saranno proprio quelle con massa  $M \simeq 10^5 M_\odot$ . Queste strutture continuano a crescere, fondendosi con altre vicine e attraendo materiale dai loro dintorni, formando strutture sempre più grandi in un processo di tipo “*bottom-up*”.

Questo modello di materia oscura si è rivelato in ottimo accordo con le osservazioni sperimentali su larga scala ( $\gtrsim 10^2 Mpc$ ), riproducendo in maniera particolarmente accurata la distribuzione di cluster e supercluster di galassie nell'Universo attuale a partire da piccole fluttuazioni nell'Universo primordiale.

È per questo motivo che ad oggi il modello  $\Lambda$ CDM (in cui la  $\Lambda$  indica l'aggiunta della costante cosmologica) è il modello standard per spiegare la materia oscura nell'Universo.

## 3.4 Problemi del modello CDM

Nonostante il modello di materia oscura fredda si dimostri estremamente efficace nel descrivere la formazione delle strutture su larga scala, presenta però dei problemi se confrontato con le osservazioni a piccola scala ( $\lesssim 1 Mpc$ ). I principali problemi di questo modello sono:

1. La teoria prevede un gran numero di *aloni* di materia oscura con massa piccola, e di conseguenza un numero troppo elevato di *galassie satellite* rispetto a quelle osservate. Per esempio per una galassia dell'ordine della Via Lattea sono previste circa 500 galassie satellite (con massa maggiore di  $10^8 M_\odot$ ) all'interno dell'alone della galassia principale, mentre per la Via Lattea ne sono state osservate solamente 11 con una massa comparabile a quelle previste.

2. Le simulazioni basate su questo modello producono aloni (e di conseguenza galassie) con nuclei piuttosto concentrati e con un profilo di densità a cuspidale, mentre le osservazioni di galassie nane sembrano fornire un profilo piatto e una concentrazione più bassa verso il centro, nonostante il fatto che siano dominate dalla materia oscura.
3. Le osservazioni effettuate sulla Via Lattea e su M31 rivelano un allineamento delle galassie satellite lungo un sottile piano (alcune decine di  $kpc$ ) e una comune orientazione delle loro orbite all'interno del piano stesso, questo risulta difficile da spiegare nel modello CDM, che invece prevede una distribuzione isotropa dei satelliti.

Oltre a questi, ci sono un certo numero di altri problemi più complessi dei quali non ci occupiamo.

Dei problemi discussi il terzo è ancora aperto; vari tentativi sono stati fatti per spiegare questo fenomeno, ma ognuno ha ricevuto forti critiche e ad oggi non ci sono soluzioni abbastanza plausibili da essere prese in considerazione.

Restringendoci quindi ai primi due problemi, il *problema dei satelliti mancanti* e il *problema "cusp/core"*, si vede che questi sono strettamente collegati.

Si è notato infatti che un meccanismo in grado di "appiattire" il profilo di densità aiuta a risolvere il problema dei satelliti mancanti, in quanto gli effetti delle forze di marea della galassia principale su una galassia satellite dipende fortemente dalla forma della densità di quest'ultima. Un profilo a cuspidale permette al satellite di mantenere gran parte della sua struttura, entrando nell'alone principale, mentre invece una distribuzione più uniforme di densità al centro dell'alone satellite permette alle forze di marea di strapparne il gas, fino anche a distruggerlo completamente in alcuni casi. Come risultato, un satellite del secondo tipo non sarà visibile, o perché è stato distrutto, o perché non ha abbastanza gas per formare delle stelle.

Il problema principale da risolvere è perciò quello legato al profilo di densità, e del perché sia più piatto rispetto alle simulazioni. Questo problema potrebbe avere come soluzione dei complessi meccanismi astrofisici legati alla componente barionica, come ad esempio effetti di feedback dovuti alle supernove, o un riscaldamento della componente di materia oscura dovuto all'attrito con i barioni.

In questa tesi vogliamo però analizzare un tipo di soluzione che punta a risolvere questi problemi modificando la natura della materia oscura, in particolare la proposta di *materia oscura tiepida*.



## Capitolo 4

# La Materia Oscura Tiepida

La materia oscura tiepida (in inglese “*warm dark matter*”, WDM) è, abbastanza semplicemente, materia oscura calda raffreddata, ovvero formata da particelle che si sono disaccoppiate mentre erano ancora relativistiche (come nel caso della HDM), ma che sono diventate non relativistiche prima delle particelle di HDM e hanno quindi una temperatura più bassa nell’Universo attuale.

Una conseguenza di questo fatto è che la lunghezza di free-streaming si abbassa rispetto alla HDM, rimanendo però più alta di quella della CDM. In questo modo a grandi scale la materia oscura tiepida si comporta esattamente come quella fredda, mentre a piccola scala le perturbazioni vengono soppresse dal free-streaming, in un modo che potrebbe curare i problemi della CDM.

### 4.1 Quantità importanti

Come per gli altri modelli di materia oscura introdotti finora, vogliamo ricavare alcune quantità importanti per definire i parametri del modello.

Partiamo dal parametro di densità: dato che la materia oscura tiepida si disaccoppia mentre è ancora relativistica è possibile usare le relazioni trovate nel caso della HDM, nella sezione 3.2.1. Per la densità numerica vale l’equazione (3.14):

$$\begin{aligned} n_{0X} &= \frac{1}{2} B g_X \frac{g_0^*}{g_X^*} n_{0r} \\ &= \left( \frac{43/11}{g_X^*} \right) \frac{B g_X}{2} n_{0r} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Per il fattore  $B g_X$  un’assunzione comune è quella di immaginare che le particelle di WDM siano dei fermioni di spin 1/2, in questo caso si ha  $B g_X = 3/2$ , che è un valore “sulla fiducia” usato per ottenere delle stime per  $m_X$ .

Ora, sostituendo nella (3.15) si ottiene il parametro di densità:

$$\Omega_X \simeq \frac{115}{g_X^*} \frac{B g_X}{1.5} \frac{m_X}{\text{keV} h^2} \quad (4.2)$$

Un’altra quantità di interesse è la dispersione delle velocità delle particelle ( $v_*$ ) che definisce sia la lunghezza di Jeans, sia quella di free-streaming, che è il parametro più importante in questo contesto. Dato che le particelle  $X$  si disaccoppiano in regime relativistico, la loro funzione di distribuzione  $f$  rimane costante finché non diventano non relativistiche, infatti:

$$f = \left( e^{p/T_X} + 1 \right)^{-1} \quad (4.3)$$

dove l’argomento dell’esponenziale rimane costante in quanto sia  $p$  che  $T_X$  scalano come  $a^{-1}$ .

Quando le particelle diventano non relativistiche, si può usare la forma per il momento  $p = m_x v$  (dove

$v$  è la velocità), mentre si può riscrivere  $T_X$  come:

$$T_X = (1+z)T_{0X} \propto (1+z) \left( \frac{\Omega_X h^2}{B g_X m_X} \right)^{1/3} \quad (4.4)$$

da cui si ottiene:

$$f = \left( e^{v/v_0} + 1 \right)^{-1} \quad (4.5)$$

$$\text{con } v_0(z) \simeq 0.012(1+z) \left( \frac{\Omega_X}{0.3} \right)^{1/3} \left( \frac{h}{0.65} \right)^{2/3} \left( \frac{1.5}{B g_X} \right)^{1/3} \left( \frac{\text{keV}}{m_x} \right)^{4/3} \text{ kms}^{-1} \quad (4.6)$$

Da questa distribuzione si ottiene la dispersione  $v_* \simeq 3.571 v_0$ .

Con questa informazione è possibile calcolare la massa di Jeans e quella di free-streaming.

Dato che, in questo modello, il momento in cui le particelle  $X$  diventano non relativistiche  $t_{nX}$  avviene molto prima dell'equivalenza radiazione materia, ricordando la relazione (3.23) si trova che la massa di Jeans diventa costante molto prima e ad un valore più basso del caso HDM, per cui in pratica l'unica quantità importante diventa la lunghezza di free-streaming (da cui si ricava facilmente la massa corrispondente).

Una stima grezza della scala di free-streaming si ottiene calcolando la distanza comovente che una particella di materia oscura copre dopo l'equivalenza [3]. Questa è ottenuta (a meno di un fattore numerico) moltiplicando la velocità  $v_0$ , valutata in  $z = z_{eq}$ , per la larghezza comovente dell'orizzonte alla stessa epoca; in questo modo si ottiene:

$$\lambda_{fX}^{>eq} \simeq 0.2 (\Omega_X h^2)^{1/3} \left( \frac{1.5}{B g_X} \right)^{1/3} \left( \frac{\text{keV}}{m_X} \right)^{4/3} \text{ Mpc} \quad (4.7)$$

In realtà la situazione è molto più complicata di così, dato che le particelle diventano non relativistiche parecchio prima dell'equivalenza. Durante questo periodo la distanza comovente percorsa scala in modo logaritmico e comporta una correzione non trascurabile alla relazione presentata qui sopra. Una stima più precisa della lunghezza di free-streaming, che tenga conto anche delle velocità prima dell'equivalenza, si può trovare in [2].

Ad ogni modo, per una discussione per ordini di grandezza, la scala fornita in (4.7) è sufficientemente precisa.

Vogliamo ora discutere brevemente un limite sulla massa  $m_X$  delle particelle di WDM.

Partiamo da un confronto col modello di materia oscura calda: la massa tipica per una particella di questo tipo (ad esempio il neutrino) è  $\sim 12$  eV. Queste particelle hanno una velocità termica  $v/c \sim 0.2$  all'equivalenza, il che distrugge le perturbazioni a scale comoventi di  $\sim 25$  Mpc. Se vogliamo ridurre quest'ultimo valore in modo da preservare le strutture su larga scala come nel modello CDM, diciamo fino a  $\sim 0.1$  Mpc, è necessario ridurre la velocità delle particelle di un fattore 250.

Per una particella di WDM la velocità al momento dell'equivalenza è circa  $v/c \propto T_X/m_X$ ; quindi per abbassare questa quantità è necessario aumentare  $m_X$  o diminuire  $T_X$ . Qui però entra in gioco un limite, che deriva dalla relazione (3.2.1), ovvero che  $\Omega_X \propto T_X^3 m_X$ , il quale è fissato dalle osservazioni e va quindi mantenuto costante; confrontando le due ultime relazioni si ottiene che, per ottenere la riduzione di  $v$  cercata, bisogna abbassare  $T_X$  di un fattore  $\sim 4$ , e aumentare  $m_X$  di  $\sim 4^3 = 64$  che equivale da una massa di circa 1 keV.

Per ottenere l'abbassamento di  $T_X$  ci sono diversi modi. Il più semplice è quello di richiedere che le particelle  $X$  si siano disaccoppiate quando il numero efficace di gradi di libertà era più alto; questo richiederebbe che  $g_X^* \simeq 690$ , che è un numero parecchio più grande del numero totale di gradi di libertà del modello standard (106.75) e delle sue varianti supersimmetriche ( $\sim 200$ ). Un numero tale di gradi di libertà si potrebbe però raggiungere in teorie con dimensioni aggiuntive.

Un'altra possibilità è che avvenga un processo di rilascio di entropia dopo che la componente  $X$  si è disaccoppiata, abbassando quindi  $T_X$  rispetto alla temperatura della radiazione. Un esempio di



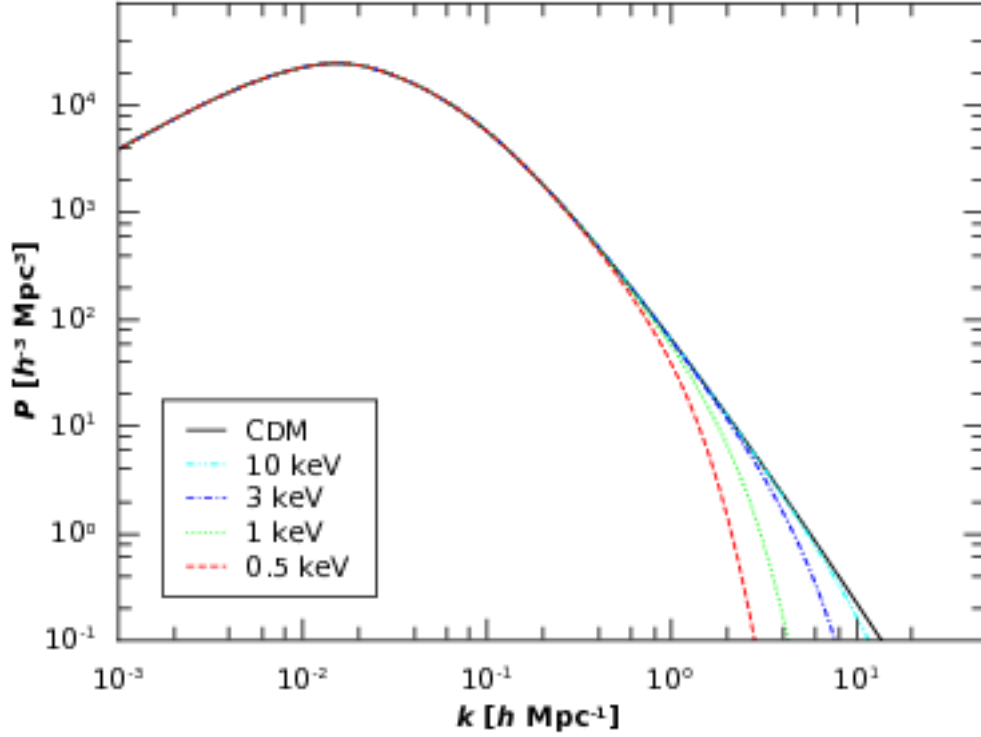


Figura 4.1: Spettro di potenza lineare delle perturbazioni in funzione del numero d'onda  $k$  nel modello CDM e per diverse masse di particelle di WDM, minore è la massa della particella e maggiore è la soppressione dello spettro a piccole scale (grandi  $k$ ). Figura presa da [10].

un processo di questo tipo potrebbe essere una transizione di fase del primo ordine con rilascio di calore latente. Ad ogni modo questo deve avvenire prima che cominci il processo di nucleosintesi a  $T \simeq 1$  Mev.

Una terza possibilità è che la temperatura di “reheating”  $T_{rh}$  dopo l’inflazione sia minore di quanto generalmente assunto [11], [17].

## 4.2 Evoluzione delle perturbazioni nel modello WDM

Il fattore di crescita lineare delle perturbazioni per questo modello, considerando  $\Omega_{materia} = 0.3$ , è:

$$g(z) \simeq (\delta_0(1+z))^{-1} \quad (4.8)$$

dove  $\delta_0$  è il fattore di soppressione di crescita rispetto ad un Universo piatto con  $\Omega_m = 1$ , a  $z = 0$ . Questo fattore è ben approssimato dalla relazione:

$$\delta_0 \simeq 2.5\Omega_m \left[ \Omega_m^{4/7} - \Omega_\Lambda + \left(1 + \frac{1}{2}\Omega_m\right) \left(1 + \frac{1}{70}\Omega_\Lambda\right) \right]^{-1} \quad (4.9)$$

Come abbiamo accennato all’inizio del capitolo, e si è visto nel caso della HDM, il fenomeno del free-streaming sopprime le perturbazioni con lunghezza d’onda minore di  $\lambda_{fX}$ . Questo modifica quindi lo spettro di potenza delle perturbazioni rispetto al caso di CDM, abbassandolo considerevolmente a piccole scale, ma lasciandolo sostanzialmente invariato a grandi scale, come si può vedere in Figura 4.1. Questo effetto si può parametrizzare attraverso la relazione [2, 18]:

$$\frac{P_{WDM}(k)}{P_{CDM}(k)} = \left[ 1 + (\alpha k)^{2\mu} \right]^{-10/\mu} \quad (4.10)$$

dove  $\mu = 1.12$  e  $\alpha$  è legato alla scala di free-streaming:

$$\alpha = 0.049 \left( \frac{\Omega_X}{0.25} \right)^{0.11} \left( \frac{m_X}{\text{keV}} \right)^{-1.11} \left( \frac{h}{0.7} \right)^{1.22} \frac{h^{-1}}{\text{Mpc}} \quad (4.11)$$

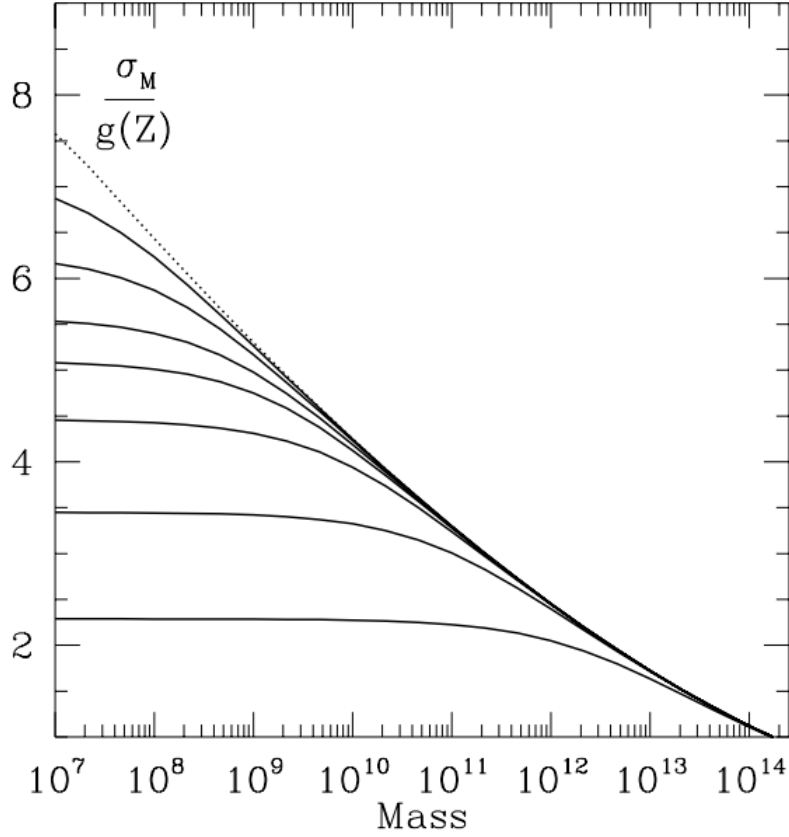


Figura 4.2: La varianza quadratica media della densità  $\sigma_M$  nella teoria lineare, in una finestra sferica a cilindro, in unità del fattore di crescita lineare  $g(z)$ . Le linee continue mostrano, dal basso verso l'alto, la  $\sigma_M$  in funzione della massa comoviente nella finestra, per particelle di WDM con massa di 0.2, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 3.0 e 5.0 keV. La linea tratteggiata mostra la stessa quantità per il modello CDM. Si assumono i seguenti parametri cosmologici:  $\Omega_m = 0.3$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.7$  e  $h = 0.65$ . Figura presa da [2].

Un modo tipico di visualizzare le differenze nello spettro è attraverso la varianza quadratica media delle perturbazioni di densità, definita come:

$$\sigma_M^2 = \left( \frac{g(z)}{g(0)} \right)^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P(k) \left| \widetilde{W}(kR) \right|^2 \quad (4.12)$$

dove  $P(k)$  è lo spettro lineare a  $z = 0$ , e  $\widetilde{W}(kR)$  è la trasformata di Fourier della funzione di filtro. La funzione di filtro più semplice è quella sferica “a cilindro” (in inglese “*top-hat*”) nello spazio fisico, definita come:

$$W_{TH}(\mathbf{x}, R) = \frac{1}{V_{TH}} \begin{cases} 1 & \text{per } |x| \leq R \\ 0 & \text{per } |x| > R \end{cases} \quad \text{con } V_{TH} = 4\pi R^3/3 \quad (4.13)$$

Il risultato di questi calcoli è illustrato in Figura 4.2, in cui è rappresentata la  $\sigma_M$  nella teoria lineare, calcolata in una “finestra” del tipo (4.13) di raggio variabile, in funzione della massa comoviente contenuta nella finestra. Il valore di  $\sigma_M$  è normalizzato per il fattore di crescita lineare  $g(z)$  (a sua volta normalizzato ad 1 per  $z = 0$ ).

Come si può vedere, al di sopra della scala di free-streaming la WDM si comporta esattamente come la CDM. Abbassando la scala di massa si nota però che la  $\sigma_M$  tende ad una costante, in quanto il campo di densità è “liscio” a piccole scale a causa della soppressione delle perturbazioni.

Il collasso gravitazionale avviene quando la  $\sigma_M$  raggiunge l'ordine delle unità, principalmente in oggetti con scale dell'ordine della massa di free-streaming, come nel caso della HDM. Dalla Figura 4.2 e

l'andamento di  $g(z)$ , si ricava il redshift corrispondente al collasso; si vede che questo passa da  $z = 3$  a 5 a 7 aumentando la massa delle particelle da 0.5 a 1.5 a 3 keV.

Sviluppando la teoria del collasso sferico presentata nella Sezione 2.4 e confrontandola con le simulazioni si trova che ([2, 5, 16, 20]):

1. il numero degli aloni con massa piccola è ridotto, insieme al numero di satelliti poco massivi in aloni con masse elevate; inoltre la densità caratteristica degli aloni più piccoli è più bassa che nel modello CDM
2. la formazione degli aloni poco massivi avviene quasi esclusivamente per frammentazione dei “pancake” o dei filamenti che collegano gli aloni più grandi, in un processo di tipo *top-down*, e più tardi ( $z < 4$ ) rispetto alla CDM
3. c'è inoltre una soppressione nella formazione delle strutture ad alti redshift ( $z > 5$ ), mentre aumenta per redshift più bassi.

Un risultato più dibattuto è invece se questo modello riesca a spiegare l'appiattimento dei profili di densità delle galassie a piccole scale, in quanto diverse simulazioni a N-corpi sembrano fornire profili a cuspidi, simili a quelli della CDM (ad esempio in [1, 16, 20, 24]).

Questo problema nasce in realtà dal fatto che queste simulazioni sono puramente classiche, e non tengono conto degli effetti quantistici, che per il modello WDM diventano rilevanti a scale molto maggiori ( $\sim 100$  pc) rispetto al modello CDM. In particolare a queste scale diventa importante il contributo dovuto alla *pressione quantistica*, generata dalla combinazione del principio di esclusione di Pauli e del principio di indeterminazione di Heisenberg. Considerando questi contributi nelle simulazioni si ottengono effettivamente dei profili piatti a piccole scale, in accordo con le osservazioni, senza modificare i risultati delle simulazioni classiche a scale maggiori ([6–8]).

Alla luce di questi risultati il modello di materia oscura tiepida sembra quindi un buon candidato per risolvere i problemi della CDM; nella prossima sezione analizzeremo alcuni limiti sulla massa di queste particelle imposti dalle osservazioni.

### 4.3 Vincoli sulla massa delle particelle

La massa delle particelle di WDM è uno dei parametri principali della teoria, in quanto influenza praticamente tutte le predizioni, a partire dalla scala di free-streaming. È per questo di fondamentale importanza restringere il campo di possibilità di questo parametro. Confrontando diverse predizioni della teoria in funzione di  $m_X$  con le osservazioni astronomiche, è possibile fissare dei limiti superiori o inferiori che restringano il range di masse permesso.

Una stima per ordini di grandezza ci dice che la massa  $m_X$  dev'essere dell'ordine dei keV per avere una scala di free-streaming adeguata, in particolare tra 1–10 keV; più grande, e la WDM è uguale alla CDM, più piccola e le strutture si formano troppo tardi, come nel modello HDM. Ci sono molti studi in letteratura che hanno trovato limiti basati su diversi fenomeni, in questo lavoro ne analizzeremo due: il primo detto *limite di Gunn-Peterson* [12], e l'altro legato all'abbondanza di galassie ad alto redshift [18].

#### 4.3.1 La funzione di massa

Prima di entrare nei dettagli di questi limiti ci serve uno strumento che riesca a contare il numero di oggetti collassati con una certa massa  $M$  e ad un certo redshift  $z$ . Questo strumento è la *funzione di massa di Press-Schechter* [21].

Richiamando quanto detto per il collasso sferico nella sezione 2.4, si assume che una perturbazione sia collassata quando nella teoria lineare si ha  $\delta_L(\mathbf{x}, t) > \delta_c \simeq 1.69$ .

In realtà questa affermazione ha senso solo all'interno di una finestra di raggio  $R$ , contenente una

massa  $M$ .

A questo punto si utilizza l'assunzione di Press-Schechter: la frazione della massa che si trova in oggetti collassati con massa maggiore di una certa  $M$  è proporzionale alla probabilità che le perturbazioni di densità siano maggiori di una densità di soglia  $\delta > \delta_s$ . La probabilità di ottenere un valore di densità tra  $\delta$  e  $\delta + d\delta$ , assumendo che le perturbazioni abbiano una statistica gaussiana, è:

$$P(\delta, M) d\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(M)}} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2(M)}\right) d\delta \quad (4.14)$$

dove  $\sigma(M)$  è quella definita nell'equazione (4.12), con la differenza che qui è più opportuno usare come filtro la funzione sferica “a cilindro” nello spazio di Fourier, invece che in quello reale.

Integrando questa distribuzione si ottiene la probabilità:

$$P(\delta > \delta_s) = \int_{\delta_s}^{\infty} P(\delta, M) d\delta = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\delta_s}{\sigma(M)}\right) \quad (4.15)$$

in cui la  $\operatorname{erfc}$  è la funzione degli errori complementare di Gauss. La relazione appena trovata non rappresenta il risultato cercato, in quanto non tratta in alcuna maniera le regioni di sottodensità, che per simmetria rappresentano metà della massa. Per questo motivo è necessario correggere l'ultima equazione di un fattore 2, anche se la spiegazione fornita da Press e Schechter risulta piuttosto insoddisfacente.

La frazione di massa contenuta in oggetti collassati con massa maggiore di  $M$  sarà quindi:

$$F(> M) = 2P(\delta > \delta_s) \quad (4.16)$$

Se poniamo  $\delta_s = \delta_c$  abbiamo la percentuale “totale” di massa collassata  $F_{nl}$ .

Ora si può calcolare la funzione di massa vera e propria:

$$n(M, t) dM = \frac{\rho_m}{M} \frac{\partial F(> M)}{\partial M} dM \quad (4.17)$$

Questa formula è molto utile per un confronto con le simulazioni, in quanto descrive in modo qualitativamente corretto l'andamento reale, ma tende a sovrastimare gli oggetti con massa molto grande, oltre ad altri effetti di cui bisogna tenere conto.

### 4.3.2 Il limite di Gunn-Peterson

Dopo la *ricombinazione* (sezione 1.1.1), in cui l'Universo è passato da completamente ionizzato a neutro, si usa dire che l'Universo è diventato trasparente alla radiazione; questo è vero per i fotoni della radiazione cosmica di background, ma non per i fotoni con lunghezza d'onda pari alle linee di assorbimento dell'idrogeno neutro, di cui la linea *Lyman- $\alpha$*  è la più intensa. La luce emessa da una sorgente in questo periodo presenta quindi questa linea di assorbimento nel suo spettro; inoltre, durante il suo cammino, questa luce subisce un continuo redshift che porta i fotoni più energetici al livello di energia della linea *Ly- $\alpha$* , quindi ad essere assorbiti. Questo fenomeno si arresta al momento della *reionizzazione*, ovvero quando la maggior parte dell'idrogeno nell'Universo è nuovamente ionizzato dai fotoni emessi dalle prime stelle e galassie.

L'effetto di questo fenomeno è quindi una larga banda di assorbimento nello spettro della sorgente, dalla linea *Ly- $\alpha$*  al redshift della sorgente, alla stessa linea al redshift corrispondente alla completa reionizzazione. Questa caratteristica è detta *Gunn-Peterson through*.

Da questo effetto è possibile ricavare una stima del momento della reionizzazione, che risulta essere completa entro  $z \sim 6$ . Ciò fornisce un limite per la massa delle particelle di WDM, perché in quel periodo ci devono essere abbastanza oggetti collassati da poter generare la radiazione ionizzante necessaria ad ottenere la completa ionizzazione dell'Universo.

Un primo trattamento di questo limite è presentato in [2], in cui si assume che la prima generazione di stelle fosse simile a quelle che si osservano nelle regioni di formazione stellare oggi: per queste stelle le

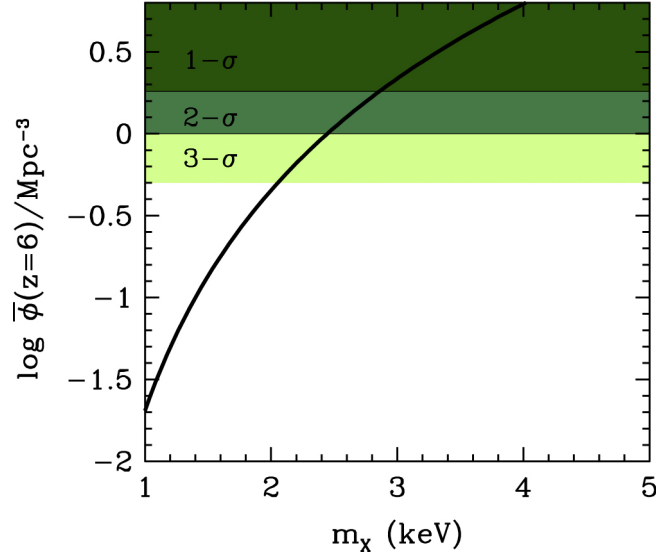


Figura 4.3: La linea continua rappresenta il massimo valore della densità numerica di aloni (il simbolo  $\phi$  è analogo a  $n$  nel testo), per diversi valori di  $m_X$  a  $z = 6$  (inclusendo le incertezze teoriche). Le aree colorate rappresentano i valori osservati della densità di galassie al livello di confidenza di  $1\sigma$ ,  $2\sigma$ ,  $3\sigma$ . Figura presa da [18].

reazioni nucleari producono all'incirca 4000 fotoni ionizzanti per barione. Questo significa che almeno una frazione di  $\sim 2.5 \times 10^{-4}$  dell'Universo doveva trovarsi in oggetti collassati. Usando le relazioni del paragrafo precedente si ricava quindi che  $m_X \gtrsim 0.75$  keV.

Una trattazione più dettagliata del problema si può trovare in [15]. Il problema di questi calcoli è che si basano su parecchie assunzioni relative alla fisica dei barioni e, a causa di queste incertezze e degenerazioni nei parametri, risulta molto difficile fornire dei limiti abbastanza stringenti [15, 23].

Questa difficoltà, in maniera diversa, affligge anche altri metodi per identificare dei vincoli per  $m_X$ , come il confronto tra le simulazioni ad N-corpi e le galassie satellite, ad esempio.

### 4.3.3 Un limite indipendente dai barioni

Un metodo che permette di aggirare il problema della fisica dei barioni è quello di sfruttare la soppressione della funzione di massa per piccole masse causato dal free-streaming.

Ad un dato redshift, la densità numerica massima di aloni cresce aumentando la massa delle particelle di WDM. Misurare un'abbondanza di galassie maggiore di questa densità massima fornisce quindi un limite inferiore sulla massa delle particelle, dato che non è possibile avere un numero di galassie superiore al numero di aloni. Questo limite è *completamente indipendente* dalla fisica dei barioni, in quanto qualsiasi effetto barionico può solo diminuire il numero di oggetti luminosi rispetto agli aloni di materia oscura.

Per svolgere questa analisi è conveniente definire la massa di “*half-mode*” come quella in cui la funzione di trasferimento (4.10) diventa 1/2 [22]:

$$M_{hm} = \frac{4\pi}{3} \bar{\rho} \left[ \pi \alpha \left( 2^{\mu/5} - 1 \right)^{-\frac{1}{2\mu}} \right]^3 \quad (4.18)$$

Per questo valore di massa si ha che il massimo valore della funzione di massa  $\bar{n}(z) \simeq n(M_{hm}(m_X), z)$ . Il lavoro di confronto è stato svolto da Menci et al. in [18]. I risultati sono presentati in Figura 4.3, in cui si confrontano i dati osservativi  $n_{obs}$  con i valori teorici  $\bar{n}_t \bar{h}$  in funzione di  $m_X$ .

Dato che le galassie luminose non possono eccedere in numero gli aloni di materia oscura, la condizione  $n_{obs} \leq \bar{n}_t \bar{h}$  fornisce i seguenti limiti:  $m_X \gtrsim 2.9$  keV ad un livello di confidenza di  $1\sigma$ ,  $m_X \gtrsim 2.4$  keV a  $2\sigma$  e  $m_X \gtrsim 2.1$  keV a  $3\sigma$ .

Questi limiti sono finora i più stringenti provenienti da fenomeni che dipendono esclusivamente dalle proprietà della materia oscura, e possono aiutare ad escludere alcuni tipi di particelle dai candidati per la materia oscura.

## Capitolo 5

# Conclusioni

Come si è potuto vedere, il problema della materia oscura è tutt'altro che risolto, se non altro per la mancanza di evidenze sperimentali, negli acceleratori o in altri esperimenti, di particelle in grado di candidarsi a formare la materia oscura.

Dal punto di vista cosmologico (che abbiamo cercato di tenere in questo lavoro) si è visto che nonostante il modello di materia oscura fredda rimanga il modello di riferimento, data l'accuratezza delle predizioni su larga scala, questo presenta dei problemi se confrontato con le osservazioni a piccola scala.

Il modello di *materia oscura tiepida*, che abbiamo qui delineato, sembra in grado di risolvere queste difficoltà, mantenendo invariate le caratteristiche a grandi scale che hanno fatto il successo del modello CDM.

La difficoltà di questo modello è che esso dipende fortemente dalla massa della particella che compone la materia oscura, a noi sconosciuta. I migliori limiti attuali pongono questa massa nel range  $\sim 3 - 10$  keV. La speranza è che le future osservazioni astronomiche riescano a migliorare queste stime; e che queste, unite a nuovi contributi teorici, ci mettano nella posizione di accettare o scartare il modello di materia oscura tiepida.





# Bibliografia

- [1] V. Avila-Reese, P. Colín, O. Valenzuela, E. D’Onghia, and C. Firmani. Formation and structure of halos in a warm dark matter cosmology. *The Astrophysical Journal*, 559(2):516, 2001.
- [2] P. Bode, J. P. Ostriker, and N. Turok. Halo formation in warm dark matter models. *The Astrophysical Journal*, 556(1):93–107, 2001.
- [3] J. R. Bond and A. S. Szalay. The collisionless damping of density fluctuations in an expanding universe. *Astrophysical Journal*, 274:443–468, Nov. 1983.
- [4] P. Coles and F. Lucchin. *Cosmology, The Origin and Evolution of Cosmic Structures*. Wiley, 2002.
- [5] P. Colín, V. Avila-Reese, and O. Valenzuela. Substructure and Halo Density Profiles in a Warm Dark Matter Cosmology. *Astrophysical Journal*, 542:622–630, Oct. 2000.
- [6] H. J. de Vega, P. Salucci, and N. G. Sanchez. Observational rotation curves and density profiles versus the thomas–fermi galaxy structure theory. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 442(3):2717–2727, 2014.
- [7] C. Destri, H. de Vega, and N. Sanchez. Fermionic warm dark matter produces galaxy cores in the observed scales because of quantum mechanics. *New Astronomy*, 22:39 – 50, 2013.
- [8] C. Destri, H. de Vega, and N. Sanchez. Quantum wdm fermions and gravitation determine the observed galaxy structures. *Astroparticle Physics*, 46:14 – 22, 2013.
- [9] S. Dodelson. *Modern Cosmology*. Academic Press, 2003.
- [10] R. M. Dunstan, K. N. Abazajian, E. Polisensky, and M. Ricotti. The Halo Model of Large Scale Structure for Warm Dark Matter. arXiv:1109.6291 [astro-ph.CO], 2011.
- [11] G. F. Giudice, E. W. Kolb, and A. Riotto. Largest temperature of the radiation era and its cosmological implications. *Physical Review D*, 64(2):023508, July 2001.
- [12] J. E. Gunn and B. A. Peterson. On the Density of Neutral Hydrogen in Intergalactic Space. *Astrophysical Journal*, 142:1633–1641, Nov. 1965.
- [13] A. Liddle. *An Introduction to Modern Cosmology*. Wiley, 2003.
- [14] J. A. S. Lima, V. Zanchin, and R. Brandenberger. On the newtonian cosmology equations with pressure. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 291(1):L1–L4, 1997.
- [15] L. Lopez-Honorez, O. Mena, S. Palomares-Ruiz, and P. Villanueva-Domingo. Warm dark matter and the ionization history of the Universe. *Phys. Rev.*, D96(10):103539, 2017.
- [16] M. R. Lovell, V. Eke, C. S. Frenk, L. Gao, A. Jenkins, T. Theuns, J. Wang, S. D. M. White, A. Boyarsky, and O. Ruchayskiy. The haloes of bright satellite galaxies in a warm dark matter universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 420:2318–2324, Mar. 2012.
- [17] A. Mazumdar and B. Zaldivar. Quantifying the reheating temperature of the universe. *Nuclear Physics B*, 886:312 – 327, 2014.

- [18] N. Menci, A. Grazian, M. Castellano, and N. G. Sanchez. A stringent limit on the warm dark matter particle masses from the abundance of  $z = 6$  galaxies in the hubble frontier fields. *The Astrophysical Journal Letters*, 825(1):L1, 2016.
- [19] P. Mészáros. The behaviour of point masses in an expanding cosmological substratum. *Astronomy and Astrophysics*, 37:225–228, Dec. 1974.
- [20] E. Papastergis, A. M. Martin, R. Giovanelli, and M. P. Haynes. The Velocity Width Function of Galaxies from the 40% ALFALFA Survey: Shedding Light on the Cold Dark Matter Overabundance Problem. *Astrophysical Journal*, 739:38, Sept. 2011.
- [21] W. H. Press and P. Schechter. Formation of Galaxies and Clusters of Galaxies by Self-Similar Gravitational Condensation. *Astrophysical Journal*, 187:425–438, Feb. 1974.
- [22] A. Schneider, R. E. Smith, and D. Reed. Halo mass function and the free streaming scale. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 433(2):1573–1587, 2013.
- [23] P. Villanueva-Domingo, N. Y. Gnedin, and O. Mena. Warm dark matter and cosmic reionization. *The Astrophysical Journal*, 852(2):139, 2018.
- [24] J. Viñas, E. Salvador-Solé, and A. Manrique. Typical density profile for warm dark matter haloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 424(1):L6–L10, 2012.
- [25] F. Zwicky. Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. *Helvetica Physica Acta*, 6:110–127, 1933.